EL LÍMIT DE ROCHE

E. Roche

Édouard Albert Roche (1820-1883) va ser un astrònom, matemàtic i geofísic francès, nascut a Montpeller.

És famós per la seva teoria que els anells de Saturn es van formar perquè un satèl·lit es va acostar massa al planeta i es va trencar per l'acció de forces gravitacionals. Aquest efecte es pot produir per sota d'una mínima distància o distància crítica al planeta des d'aleshores anomenada "límit de Roche".

Roche era una persona solitària i discreta i preferia la tranquil·litat de Montpeller a l'enrenou de la vida parisina, per això al principi la seva obra només va ser coneguda per uns quants teòrics, com Henri Poincaré que havia ensenyat els seus treballs a la Universitat de La Sorbona, però tret d'això no va tenir una gran difusió fins a un segle més tard, arran del progrés en l'exploració del Sistema Solar i els seus planetes, anells i satèl·lits.

El límit de Roche en primera aproximació

El límit de Roche va ser descrit el 1848-49 en el treball "La figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné" adreçat a l'Académie des Sciences de Montpellier, i és la menor distància a què un cos fluid o només cohesionat per la seva pròpia gravetat es pot acostar a un planeta sense que els seus fragments no es dispersin per les forces de marea. Es pot citar com a exemple el cas del cometa Shoemaker-Levy 9: Aquest cometa el 16 de maig de 1992 va passar a 1.000.000 km de Júpiter, de manera que va quedar capturat en òrbita al seu voltant. En el pas següent, el 7 de juliol de 1992, només va passar a uns 115.000 km (1,6 vegades R_J) i es va trencar en 21 trossos. Sabem que finalment va caure a la seva superfície en el pas següent, fenomen que aleshores va aixecar molta expectació.

Per forces de marea cal entendre la diferent força d'atracció del planeta entre la part del satèl·lit que li és més pròxima i la part del satèl·lit que li és més allunyada. Com que cada partícula del satèl·lit està situada a una distància del planeta diferent de la de les partícules veïnes, per això cada partícula està sotmesa a una força d'atracció diferent.

Aquesta diferència d'atraccions tendeix a separar unes partícules de les altres, cosa que en tot cas ha de ser compensada per la gravetat del propi satèl·lit. Dins el límit de Roche la diferència entre la força d'atracció que el planeta exerceix sobre els punts més pròxim i més allunyat del satèl·lit excedeix la força de la gravetat del satèl·lit i per tant aquest està en perill de ser destruït per les forces de marea.

Les forces de marea depenen de les dimensions del satèl·lit i de la seva distància al planeta. Si el satèl·lit és molt gran, aquestes forces augmenten, però si és molt petit aquestes forces disminueixen. També augmenten si el satèl·lit està bastant a prop del seu planeta i disminueixen si n'està més allunyat. Tanmateix, en la majoria dels satèl·lits del Sistema Solar aquestes forces estan suficientment compensades per la seva pròpia gravetat.

En el mateix límit de Roche les dues forces s'equilibren però més endintre del límit predomina l'atracció diferencial o força de marea, de manera que un satèl·lit sense cohesió interna es disgregaria. Ara bé, la cohesió o resistència a la tracció de les seves roques pot impedir el seu trencament fins i tot a una distància inferior, p. ex. es troben en aquest cas el satèl·lit de Mart Fobos (per a Mart el límit de Roche en relació a Fobos és de l'ordre de 10.560 km i Fobos està a només 9.380 km) i els de Júpiter Adrastea i Metis. Entrar dintre del límit de Roche pot resultar més perillós per als cometes perquè sembla que estan formats per roques i gel que poden estar menys cohesionats i ser mès fàcils de fragmentar-se.

La conseqüència és que dintre el límit de Roche un cos simplement dipositat sobre la superfície del satèl·lit en la cara que dóna el planeta, es podria separar i entrar en una altra òrbita, ja que l'atracció del planeta seria superior a la del satèl·lit (això cal que els astronautes del futur ho tinguin en compte!). De més a més, com que el seu centre de gravetat seria més pròxim al planeta que el del satèl·lit, per la 3ª llei de Kepler tindria un període de revolució més curt i es posaria a avençar el satèl·lit en el sentit tangencial o orbital. Aquest altre efecte de separació en termes de mecànica equival a un esforç tallant en sentit orbital, i és el que fa que la distribució de les partícules resultants de la disgregació prengui la forma d'un anell.

Si el planeta i el cometa o satèl·lit, tenen la mateixa densitat, el límit de Roche és de 2,446 (*) vegades el radi del planeta.

(*) Algunes fonts consultades donen valors lleugerament diferents d'aquest coeficient, p. ex. 2,423 - 2,44 - 2,446 - 2,45 - 2,4554 - 2,456, etc.

Per als 4 grans planetes del Sistema Solar, tots quatre amb sistemes d'anells, en xifres rodones aquests límits són de:

Júpiter	175.000 km
Saturn	147.000 km
Urà	62.000 km
Neptú	59.000 km

Aquesta distància també representa, més o menys, la frontera entre el sistema d'anells de cada planeta i els seus satèl·lits majors més pròxims. Atès que les forces de marea són superiors a la força de la gravetat del satèl·lit, cap cos no pot créixer per coalescència de petites partícules dintre d'aquest límit.

En el cas que les densitats del planeta i del satèl·lit siguin diferents, el límit de Roche ve donat per l'expressió:

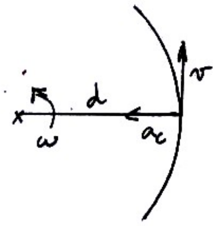
$2{,}44 * R * (\rho_p / \rho_s)^{1/3}$ (arrel cúbica de ρ_p / ρ_s)

Aquesta expressió indica que si el satèl·lit és més dens que el planeta el límit de Roche és menor i hi pot estar més a prop sense perill, però que si és menys denys, li cal estar-ne més allunyat. P. ex. vegem el càlcul del límit de Roche per a Fobos, tenim R de Mart 3.397 km i densitats de Mart i Fobos 3.933 i 1.900 kg/m^3 respectivament, d'on resulta un límit de Roche de $2{,}44*3.397*(3.933/1.900)^{1/3} = 10.563$ km. Si Fobos tingués la mateixa densitat que Mart, el límit de Roche seria més baix, només de 2,44*3.397 = 8.290 km.

De totes maneres, el límit de Roche definit d'aquesta manera és incomplet perquè només té en compte les forces d'atracció gravitatòria del planeta, les forces de marea i la gravetat del propi satèl·lit. Però tal com acostuma a passar la realitat és força més complexa i l'estabilitat estructural d'un satèl·lit també depèn de la seva velocitat de translació al voltant del planeta i de la velocitat de rotació sobre el seu eix, ja que totes dues impliquen l'existència d'unes forces centrífugues addicionals que cal considerar. També caldria tenir en compte la deformació del satèl·lit cap a una forma ovalada degut a la mateixa atracció diferencial i la seva elasticitat i també a la possible existència de forces electromagnètiques.

Un repàs previ al moviment circular uniforme

Abans de fer un tractament analític una mica més acurat, va bé començar fent un repàs de la física relacionada amb el moviment circular uniforme:



$v = \omega * d$

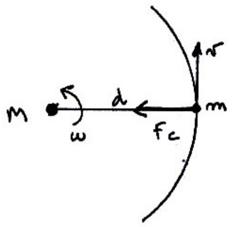
a centrípeta $a_c = v^2/d = \omega^2 * d$

v = velocitat lineal en m/s,

ω = velocitat angular en radiants/s

a_c = acceleració centrípeta en m/s^2

Càlcul de la distància d'un satèl·lit al seu planeta:



La força centrípeta necessària per donar-li un moviment circular uniforme és:

$F_c = m*a_c = m*v^2/d = m*\omega^2*d$

L'atracció gravitatòria del planeta donada per la Llei de Newton és:

$F_c = G*M*m/d^2$

Igualant les dues expresions tenim:

$G*M*m/d_2 = m*\omega^2*d$

d'on resulta:

$d = [(G*M)/\omega^2]^{1/3}$ (arrel cúbica)

o bé $\omega = [(G*M)/d^3]^{1/2}$ (arrel quadrada)

Fixem-nos que en aquestes expressions no hi figura enlloc la massa del satèl·lit, o sigui que aquesta massa no influeix en el resultat.

Vegem ara alguns exemples d'aplicació d'aquestes fórmules:

1/ Calcular el període de la ISS (Estació Espacial Internacional), sabent que l'alçada mitjana de la seva òrbita és de 354 km.

Prenent els valors de $M_{Terra} = 6*10^{24}$ kg

$G = 6{,}67*10^{-11}$ N*m^2/kg^2

d = 354.000 + 6.378.100 (radi Terra) = 6.732.100 m

aplicant la fórmula resulta un període de 5.486 seg = 1h 31m 26 seg ≈ 15,75 voltes cada dia.

2/ Calcular l'alçada d'un satèl·lit geoestacionari.

Té un període igual al de rotació de la Terra = 3h 56m 4s = 86.164 s per girar 2π radiants

d'on $\omega = 2\pi/86.164$

aplicant la fórmula resulta un valor d = 42.220.465 m = 42.220,645 km

i restant-hi el radi de la Terra resulta una alçada sobre el sòl de 35.488,365 km.

3/ També podem deduir analíticament la 3ª Llei de Kepler:

de $\omega^2 = G*M/d^3$

Com que $\omega = 2\pi/T$ essent T el període de revolució en segons, resulta:

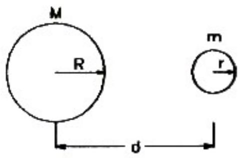
$4\pi^2/T^2 = G*M/d^3$ o sigui:

$T^2 = (4\pi^2/G*M)*d^3$

o sigui que el quadrat del període de revolució és proporcional al cub de la distància de l'astre menor a l'astre principal de massa M. Aquest astre principal en el cas dels satèl·lits és el seu planeta i en el cas dels planetes és el Sol o bé la seva estrella corresponent.

El límit de Roche vist amb més detall

Fet aquest petit repàs de física ja podem estudiar el límit de Roche amb una mica més de detall. Aquest estudi es pot fer des de diferents punts de vista i primerament calcularem la diferència d'acceleració gravitatòria causada per un planeta, entre el centre d'un satèl·lit de radi r i el punt del satèl·lit oposat a un planeta situat a la distància d.



tenim:

$a = G*M/d^2$ i

$a' = G*M/(d+r)^2$

$a - a' = G*M*[(1/d^2)-(1/(d+r)^2)]$

El segon terme de dintre els claudàtors el podem aproximar a partir dels dos primers termes del desenvolupament en sèrie de la funció $f(r) = 1/(d+r)^2$ per la fórmula de Taylor, per tant tenim:

$f(r) = f(0) + f'(0)*r$

D'aquesta manera tenim $f(0) = 1/d^2$

i $f'(r) = -2/(d+r)^3$ d'on $f'(0) = -2/d^3$

aleshores resulta,

$f(r) \approx 1/d^2 - 2r/d^3$

i per tant,

$a - a' = G*M*[(1/d^2) - (1/d^2) + (2r/d^3)] = 2G*M*r/d^3$

En el límit de Roche aquesta diferència de gravitació deguda al planeta s'iguala amb la gravitació del propi satèl·lit que val,

$G*m/r^2$

Per tant,

$G*m/r^2 = 2G*M*r/d^3$

Posant les masses M i m en funció dels radis R i r del planeta i del satèl·lit i de les seves densitats ρ_p i ρ_s tenim,

$M = (4/3)\pi*R^3*\rho_p$ i $m = (4/3)\pi*r^3*\rho_s$

Substituint i simplificant resulta,

$(d/R)^3 = 2\rho_p/\rho_s$

Aquest és un cas particular de l'expressió general de Roche,

$(d/R)^3 = k*\rho_p/\rho_s$

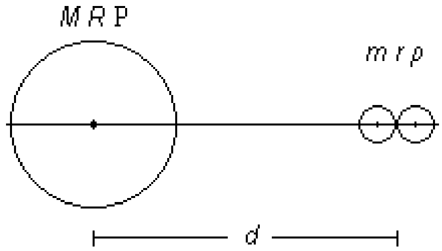
on el coeficient k pren diferents valors segons les hipòtesis considerades. En el cas que hem vist, de només tenir en compte la força de marea en el pla equatorial del satèl·lit tangent a la seva òrbita, tenim k = 2, i el valor del límit de Roche serà,

$d = 1,259921R*(\rho_p/\rho_s)^{1/3}$ (arrel cúbica)

Fixem-nos que en aquestes expressions només figura la relació entre les densitats del planeta i del satèl·lit i no hi apareix el radi del satèl·lit, considerant però que aquest radi r és petit en relació a la distància al planeta d.

Si haguéssim considerat el cas d'una pedra solta posada en el punt del satèl·lit més pròxim al planeta, hauríem arribat al mateix resultat. Justament per això estem dient que un cos sense cohesió es disgrega si entra més endintre del límit de Roche.

Un altre supòsit a estudiar és el de veure quan la força de marea partiria pel mig un satèl·lit sense cohesió. Això ho estudiarem suposant un satèl·lit format per 2 petites esferes de radi r que es toquen en un punt de tangència situat a la distància d del planeta. La força de marea entre les dues esferes ha de ser proporcional a la massa del planeta, o sigui a $R^3*\rho_p$ i inversament proporcional al cub de la distancia d (derivada d'un camp gravitatori inversament proporcional a d^2). La gravitació cohesionadora entre les dues esferes és proporcional a la seva densitat ρ_s.



La força d'atracció entre les dues esferes és:

$G*m^2/(2r)^2 = G*m^2/4r^2$

La força d'atracció entre el planeta i un cos situat a la distància d és:

$G*M*m/d^2$

i derivant respecte a d tenim,

$-2G*M*m/d^3$

Multiplicant per la diferència de posició entre les dues esferes (2r) resulta:

$-4G*M*m*r/d^3$

Aquesta és la força de marea que s'ha d'equilibrar amb l'atracció entre les dues esferes, de manera que tenim:

$4G*M*m*r/d^3 = G*m^2/4r^2$

d'on simplificant resulta,

$(d/R)^3 = 16\rho_p/\rho_s$ i $d = 2{,}519842(\rho_p/\rho_s)^{1/3}$(arrel cúbica)

Una altra vegada aquest resultat és incomplet perquè només té en compte l'acció de les forces de marea contra la gravetat pròpia del satèl·lit i no té en compte les altres forces presents. De totes maneres notem que aquest valor és el doble del valor anterior, trobat per al cas d'una pedra solta sobre la superfície del satèl·lit. Això vol dir que la tendència a la disgregació és més forta en el sentit de partir el satèl·lit equatorialment en dues parts, més que no pas en el sentit d'arrencar material de la superfície en els punts més pròxim i més allunyat del planeta.

Si es té el compte la deformació del satèl·lit per acció de la gravetat del planeta, que tendeix a donar-li una forma ovalada, el càlcul del límit de Roche es complica molt i dóna lloc a una equació que no es pot resoldre algebraicament, de manera que cal trobar la seva solució per aproximacions successives. En aquest cas s'arriba a un valor de k = 14,22526, o sigui a les expressions,

$(d/R)^3 = 14{,}22526\rho_p/\rho_s$ i $d = 2{,}423(\rho_p/\rho_s)^{1/3}$ (arrel cúbica)

Una millor aproximació encara ve donada per l'expressió,

$$d \approx 2.423R\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{(1+\frac{m}{3M})+\frac{c}{3R}(1+\frac{m}{M})}{1-\frac{c}{R}}\right)^{\frac{1}{3}}$$ (arrel cúbica)

on c/R és un factor que expressa el grau de deformació del planeta = radi polar/radi equatorial.

Dels dos casos considerats del límit de Roche per a una massa solta posada a la perifèria del satèl·lit o bé de les dues meitats del satèl·lit definides pel pla equatorial tangent a la seva òrbita, una de les fonts consultades en diu respectivament límit de Roche per als cossos rígids i límit de Roche per als cossos no rígids, i dóna les següents taules per al Sistema Solar i explica que el veritable límit de Roche per a cada cas concret estarà situat en algun punt intermedi entre els dos límits expressats.

Cos	Densitat (kg/m^3)	Radi (m)
Sol	1.400	695.000.000
Júpiter	1.330	71.500.000
Terra	5.515	6.376.500
Lluna	3.340	1.737.400

Aquests són els diàmetres i les densitats tingudes en compte per al Sol, Júpiter, la Terra i la Lluna.

En la taula següent els radis de les dues primeres files són radis terrestres i els de les dues darreres són radis solars. Per als casos dels cometes, també s'ha tingut en compte un valor adient de la densitat.

Cos	Satèl·lit	Límit de Roche (rígid)		Límit de Roche (no rígid)	
		Distància (m)	Radi	Distància (m)	Radi
Terra	Lluna	9.495.665	1,49	18.261.459	2,86
Terra	Cometa	17.883.432	2,80	34.392.279	5,39
Sol	Terra	554.441.389	0,80	1.066.266.402	1,53
Sol	Cometa	1.234.186.562	1,78	2.373.509.071	3,42

En aquesta tercera taula es dóna els valors dels límits de Roche de Mercuri respecte al Sol i d'alguns satèl·lits pròxims als seus planetes respectius.

Cos central	Satèl·lit	Radi Orbital: Límit de Roche	
		(Rígid)	(No Rígid)
Sol	Mercuri	104:1	54:1
Terra	Lluna	41:1	21:1
Mart	Fobos	171%	89%
	Deimos	456%	237%
Júpiter	Metis	191%	99%
	Adrastea	192%	100%
	Amaltea	178%	93%
	Tebe	331%	172%
Saturn	Pan	177%	92%
	Atles	182%	95%
	Prometeu	185%	96%
	Pandora	188%	98%
	Epimeteu	198%	103%
Urà	Cordèlia	155%	81%
	Ofèlia	168%	87%
	Bianca	184%	96%
	Cressida	193%	100%

Neptú	Nàiade	144%	75%
	Zàlassa	149%	78%
	Despina	157%	82%
	Galatea	184%	96%
	Làrissa	219%	114%
Plutó	Caront	13:1	6.8:1

Es pot veure com alguns satèl·lits menors dels planetes gegants es troben a prop dels seus límits de Roche, essent la seva estructura mantinguda per les forces internes de cohesió, o sigui per la resistència a la tracció de les seves roques i materials que els componen.

S'ha dit que també calia tenir en compte altres forces presents. En primera instància aquestes forces són la força centrífuga deguda al moviment orbital del satèl·lit i la força centrífuga debuda a la rotació del satèl·lit sobre el seu propi eix, però ara només tindrem en compte la primera d'aquestes dues forces perquè l'efecte de la segona pot ser molt petit, degut a les petites dimensions dels satèl·lits més pròxims als planetes i/o també les seves baixes velocitats de rotació, ja que la majoria d'ells té rotació capturada.

En el cas que s'ha estudiat de les forces de marea que actuen en el pla equatorial tangent a l'òrbita del satèl·lit, a l'acceleració de marea s'hi ha d'afegir la diferència entre l'acceleració centrípeta que hi ha al centre del satèl·lit (a una distància d del planeta) i la que hi ha al punt del satèl·lit més allunyat (a una distància d+r).

La velocitat angular del satèl·lit al voltant del planeta s'ha vist que era de,

$\omega = [(G*M)/d^3]^{1/2}$

o sigui que:

$\omega^2 = (G*M)/d^3$

i l'acceleració centrípeta en els dos punts expressats val:

$b = \omega^2*d$ i $b' = \omega^2*(d+r)$

d'on

$b' - b = \omega^2*(d+r-d) = \omega^2*r = (G*M*r)/d^3$

Aquesta acceleració és la que cal sumar a l'acceleració de marea s'ha vist abans,

$2G*M*r/d^3$

i la seva suma és la que s'ha d'igualar a la gravitació del propi satèl·lit,

$G*m/r^2$

Per tant resulta:

$[(G*M*r)/d^3] + [2G*M*r/d^3] = 3G*M*r/d3 = G*m/r^2$

Posant també les masses M i m en funció dels radis R i r i de les densitats ρ_p i ρ_s i simplificant, resulta aquesta vegada l'expressió,

$(d/R)^3 = 3\rho_p/\rho_s$ i $d = 1,44225R*(\rho_p/\rho_s)^{1/3}$ (arrel cúbica)

O sigui en aquest cas resulta la mateixa expressió general de Roche però amb un valor de k = 3.

Aquesta expressió millora la que abans s'havia obtingut per als cossos rígids amb k = 2 i $d = 1,25992R*(\rho_p/\rho_s)^{1/3}$

Rotació capturada

Acabem aquest tema veient com l'acció de les forces de marea a la llarga comporta que els satèl·lits que tenen un moviment de rotació sobre el seu eix, de mica en mica es van frenant i acaben mostrant sempre la mateixa cara cap al seu planeta.

En anglès, de la rotació capturada en diuen *tidal locking*, o sigui tancament de marea, i aquesta denominació ja relaciona aquest fenomen amb les forces de marea. Cal aclarir que rotació capturada no vol pas dir que el satèl·lit no giri al voltant del seu eix sinó que aquesta rotació dura o tarda el mateix temps que fa una òrbita al voltant del planeta.

Hem vist que l'atracció gravitatòria del planeta produeix un estirament o allargament del satèl·lit en la direcció de la línia que els uneix i que això també comporta una compressió en el sentit perpendicular. Com que els cossos no són mai totalment rígids, això fa que el satèl·lit quedi una mica ovalat en direcció al planeta.

Quan el satèl·lit gira sobre el seu eix, aquest allargament o protuberància, per efecte de la rotació s'aparta de la línia que uneix els dos astres, mentre que l'atracció del planeta sempre s'exerceix sobre aquesta línia, i per això la protuberància es va traslladant endarrera sobre la superfície del satèl·lit per situar-se en línia amb la força d'atracció. Ara bé, aquest efecte no és instantani, de manera que la protuberància sempre queda una mica avençada respecte a la línia on s'exerceix la força d'atracció.

El resultat és que l'atracció del planeta sobre la protuberància del satèl·lit actua en sentit contrari al de la rotació i, per tant, la velocitat de rotació del satèl·lit disminueix lentament fins que no se sincronitza amb la seva translació orbital. En aquell moment, la protuberància ja queda quieta i fixa en direcció al planeta.

Aquesta pèrdua de velocitat de rotació comporta una pèrdua d'energia, que s'ha anat transformant en calor a l'interior del satel·lit degut als continuats moviments de compressió i descompressió i que s'ha dissipat cap a l'espai exterior.

Acabem aquesta sessió, en què s'ha parlat sovint de les forces de marea, esmentant simplement que aquestes forces també són les responsables del que en astrofísica s'anomena "espaguetificació" de la matèria o bé, tal com mostra el dibuix, espaguetificació de tot un atronauta, quan és atret i succionat cap a una estrella molt massiva o un forat negre.