NOMBRES PRIMERS,
NOMBRES MISTERIOSOS, NOMBRES MERAVELLOSOS

Àmbit

Tot el que es diu sobre nombres primers, es refereix només al conjunt de nombres naturals, o sigui enters i positius.

Definició

És primer qualsevol nombre natural major d'1 que només es pot dividir per 1 i per ell mateix. També es pot dir que és aquell que únicament té 2 divisors enters.

Euclides

1. Si un nombre primer p divideix un producte m.n, almenys divideix un dels dos nombres m o n. P. ex. si 5 divideix 360 = 36*10, o bé divideix el 36 o bé divideix el 10. Això no és veritat per als nombres compostos, p. ex. 72 divideix 360 = 36*10, però no divideix ni el 36 ni el 10.
2. Un nombre natural, o és primer, o bé es pot expressar de manera única com a producte de nombres primers (atesa la propietat commutativa de la multiplicació, sense tenir en compte l'ordre dels factors). Aquesta proposició es coneix com al Teorema fonamental de l'aritmètica.
3. Hi ha infinits nombres primers.

Per què l'1 no és primer?

- Per definició.
- Perquè ho exigeix el teorema fonamental de l'aritmètica, ja que aleshores la descomposició d'un nombre en nombres primers no seria única.
- Perquè hi ha diverses propietats en l'enunciat de les quals caldria dir "per a qualsevol valor d'n primer menys l'1" i excloent l'1 del conjunt de nombres primers, no cal anar repetint aquesta distinció.

Classes de nombres naturals

Vista la definició de nombre primer, podem classificar el conjunt dels nombres naturals en 3 classes:

- Nombres primers.
- Nombres compostos.
- La unitat = aquells nombres que tenen un invers dintre el conjunt (nombre que multiplicat pel seu invers dongui 1).

Garbell d'Eratòstenes

El mètode més elemental de fer una taula de nombres primers és el de l'anomenat "garbell d'Eratòstenes", que consisteix a anar ratllant la successió de nombres naturals a partir de l'1, primer de 2 en 2 (però no el 2), després de 3 en 3 (però no el 3), de 5 en 5 (però no el 5), de 7 en 7 (però no el 7), d'11 en 11 (però no l'11) i així successivament, fent el compte amb els nombres primers ja trobats. Això s'ha de fer sense eliminar els nombre ja ratllats anteriorment, sinó només ratllant-los tantes vegades com faci falta. No cal fer aquest procés amb els nombres compostos perquè l'ùnic que es fa és repetir nombres que ja han estat ratllats abans.

Demostració de la infinitud de la successió dels nombres primers

Suposem que p_n és el nombre primer més gran que existeix. Aleshores calculem el nombre

$P = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots p_n + 1$ essent p_i els nombres primers en ordre ascendent i mirem si P és primer o compost.

Si P és primer, ja hem trobat un nombre primer que és major que p_n.

Si P és compost, haurà de ser producte d'almenys dos o més nombres primers majors que p_n, atès que el quocient de P amb qualsevol nombre primer menor o igual que p_n sempre dóna 1 de residu.

Com que aquesta conclusió contradiu la hipòtesi incial (mètode de reducció a l'absurd), la hipòtesi inicial ha de ser necessàriament falsa, i donat un nombre primer qualsevol p_n sempre en podrem trobar un d'encara més gran.

Tots els nombres primers són "veïns" d'un múltiple de 6

En efecte, qualsevol nombre n = 6q + r, essent r = 0, 1, 2, 3 4, o bé 5.

Si r és 0, 2, o 4, n resulta ser un nombre compost.

Si r = 1, tenim n = 6q + 1.

Si r = 5, tenim n = 6q + 5 = 6(q + 1) -1, com es volia demostrar.

Descomposició d'un nombre en factors primers

Es tracta de trobar quins nombres primers són els divisors d'un nombre compost i quantes vegades ho és cada un. D'una manera pràctica això es fa amb una ratlla vertical a la dreta del nombre i anant-lo dividint successivament pels nombres primers per ordre creixent, mentre es pugui.

P. ex:

$$\begin{array}{r|l} 161.700 & 2 \\ 80.850 & 2 \\ 40.425 & 3 \\ 13.475 & 5 \\ 2.695 & 5 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

D'on $161.700 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2 \times 11$

Segons va determinar Euclides, per a cada nombre compost diferent, aquesta descomposició en nombres primers és única. Quan s'ha de simplificar fraccions, va molt bé posar el numerador i el denominador d'aquesta manera i de seguida es veu per quins nombres cal dividir per fer la simplificació ràpidament.

Nombres primers entre si

Dos nombrers són primers entre si quan no tenen cap divisor comú, tret d l'1. No cal que siguin nombres primers, considerats individualment, sinó que poden ser nombres compostos.

P. ex. 99 i 490 són nombres compostos, ja que $99 = 3^2 \times 11$ i $490 = 2 \times 5 \times 7^2$, però són primers entre si perquè no tenen cap divisor comú.

Una fracció ja no es pot simplificar més quan el numerador i el denominador arriben a ser nombres primers entre si.

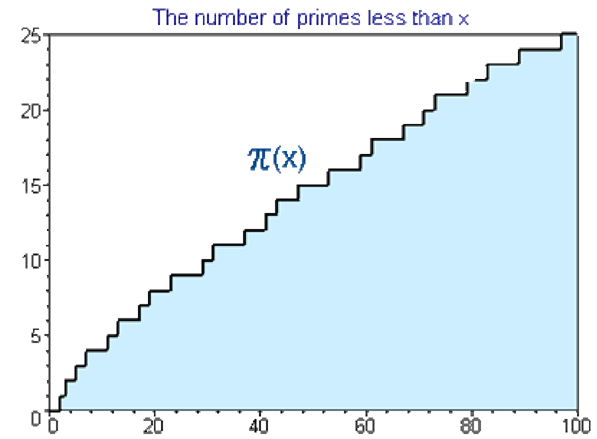
P. ex: 1.188/5.880 es pot simplificar a 594/2.940 i 297/1.470 però quan s'arriba a 99/490 ja no es pot simplificar més.

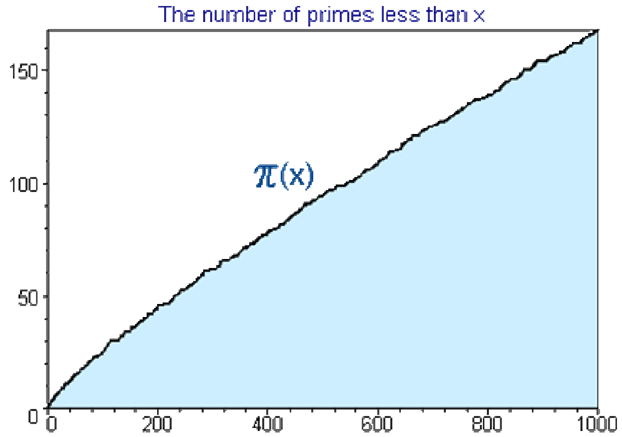
Distribució dels nombres primers

Aquesta qüestió equival a quantificar quants nombres primers hi ha no superiors a un nombre qualsevol donat, x. Aquest nombre es defineix com a la funció π (x).

Com que la successió de nombres primers és infinita, π (x) tendeix a infinit quan x tendeix a infinit (veure al final la taula dels 1.000 primers nombres primers).

Aquesta funció és esglaonada, irregular i de pendent decrexient, la qual cosa vol dir que els nombres primers cada cop van essent més escassos.





Taula de la quantitat de nombres primers:

x	π (x)	π (x)/x en %
10	4	40,00 %
100	25	25,00 %
1.000	168	16,80 %
10.000	1.229	12,29 %
100.000	9.592	9,59 %
1$_1$000.000	78.498	7,85 %
10$_1$000.000	664.579	6,66 %
100$_1$000.000	5$_1$761.455	5,76 %
1.000$_1$000.000	50$_1$847.534	5,08 %
10.000$_1$000.000	455$_1$052.511	4,55 %
100.000$_1$000.000	4.118$_1$054.813	4,12 %
1$_2$000.000$_1$000.000	37.607$_1$912.018	3,76 %
10$_2$000.000$_1$000.000	346.065$_1$536.839	3,46 %
100$_2$000.000$_1$000.000	3$_2$204.942$_1$750.802	3,20 %
1.000$_2$000.000$_1$000.000	29$_2$844.570$_1$422.669	2,98 %
10.000$_2$000.000$_1$000.000	279$_2$238.341$_1$033.925	2,79 %
100.000$_2$000.000$_1$000.000	2.623$_2$557.157$_1$654.233	2,62 %

1$_3$000.000$_2$000.000$_1$000.000	24.739$_2$954.287$_1$740.860	2,47 %
10$_3$000.000$_2$000.000$_1$000.000	234.057$_2$667.276$_1$344.607	2,34 %
100$_3$000.000$_2$000.000$_1$000.000	2$_3$220.819$_2$602.560$_1$918.840	2,22 %
1.000$_3$000.000$_2$000.000$_1$000.000	21$_3$127.269$_2$486.018$_1$731.928	2,11 %
10.000$_3$000.000$_2$000.000$_1$000.000	201$_3$467.286$_2$689.315$_1$906.290	2,01 %

Fins a 10^{10} el nombre de nombres primers es troba senzillament comptant-los, però per més endavant ja s'ha d'emprar altres tècniques. El 1994 es va assolir el valor de π (10^{17}) i π (10^{18}), i l'oct 2000 es va arribar a π (10^{21}).

La funció π (x)

Ara bé, hi ha alguna funció coneguda que permeti calcular en forma d'expressió matemàtica, o almenys aproximar, els valors de la funció π (x)?

Doncs sí que hi és. Després d'estudis de diferents matemàtics, el 1896, Jacques Hadamard i Charles de la Vallée Poussin van demostrar, independentment l'un de l'altre, que a mida que x anava creixent, la funció π (x), en termes relatius s'aproximava cada cop més a x/lnx, però per sota. Es diu que són funcions assimptòtiques, i aquest és l'anomenat Teorema dels nombres primers.

Compte! Que π (x) tendeixi a x/lnx no vol dir que la seva diferència tendeixi a zero, sinó que vol dir que el seu quocient tendeix a 1!!

> P. ex. la diferència de les funcions $y_1 = x^2 - x$ i $y_2 = x^2$ val $y_1 - y_2 = x$ i tendeix a infinit quan x tendeix a infinit, mentre que el seu quocient és $y_1/y_2 = 1 - 1/x$ i tendeix a 1.

Per situar-nos en l'escala de logaritmes naturals, segueix una taula amb les primeres potències del nombre e.

$e^1 =$ 2,718	$\ln e^1 = 1$		$e^4 =$ 54,598	$\ln e^4 = 4$
$e^2 =$ 7,389	$\ln e^2 = 2$		$e^5 =$ 148,413	$\ln e^5 = 5$
$e^3 =$ 20,086	$\ln e^3 = 3$		$e^6 =$ 403,429	$\ln e^6 = 6$

La funció x/ln(x-1)

Aquesta funció també és assimptòtica amb π (x) i encara s'hi acosta més ràpidament. Això es pot veure en aquesta taula comparativa.

x	π (x)	x/lnx	aprox.	x/ln(x-1)	aprox.
1.000	168	145	86,31 %	169	100,60 %
10.000	1.229	1.086	88,36 %	1.218	99,10 %
100.000	9.592	8.686	89,93 %	9.512	99,17 %
1$_1$000.000	78.498	72.382	92,21 %	78.030	99,40 %
10$_1$000.000	664.579	620.640	93,39 %	661.459	99,53 %
100$_1$000.000	5$_1$761.455	5$_1$428.681	95,16 %	5$_1$740.304	99,63 %

Hem dit que la diferència absoluta entre π (x) i x/lnx pot assolir valors molt grans, però tanmateix està afitada en funció d'x, podríem dir que està afitada percentualment. S'ha demostrat que per a $x > 10$, $x/\ln x < \pi(x)$, i que, per a valors grans d'x, $\pi(x) < 1{,}04423 \cdot x/\ln x$. Això vol dir que, a la llarga, π (x) no supera el 104,423 % d'x/lnx.

Una altra font d'informació diu que per a valors grans d'x, el quocient π (x)/(x/lnx) està comprès entre 0,992 i 1,105.

Estimació aproximada de l'enèsim nombre primer

Anomenem p(n) l'enèsim nombre primer. En una primera aproximació, la funció p(n) és assimptòtica amb nln(n), però hi ha fórmules més aproximades i complicades.

P. ex. p(n) assimptòtica amb n*[ln(n) + lnln(n) - 1]

Per a n = 1.000.000, aquests fórmules donen respectivament (i aproximadament?) 13.800.000 i 15.400.000. El realitat, el mil·lionèsim nombre primer és el 15.485.863 (error del 0,56 %).

Probabilitat que un nombre x elegit a l'atzar sigui primer

Aquesta probabilitat s'aproxima assimptòticament a 1/lnx. Això es dedueix de la definició de probabilitat = casos favorables / casos possibles = (x/lnx) / x = 1/lnx.

Ara bé, com que sabem que la densitat de nombres primers no és uniforme sinó que al principi és més gran i després va disminuint, no podem triar arbitràriament un nombre i pensar-nos que l'hem escollit a l'atzar, sinó que caldria escriure tots els nombres en unes paperetes iguals, barrejar-les perfectament i després extreure'n una, perquè tots els nombres tinguessin la mateixa probabilitat de ser elegits.

Probabilitat que dos nombres elegits a l'atzar siguin primers entre si

Sabem que, a mida que avancem en la successió de nombres naturals, la probabilitat que un nombre elegit a l'atzar sigui primer va disminuint i tendeix a 0, però, en canvi, la probabilitat que dos nombres qualssevol elegits a l'atzar siguin primers entre si, no tendeix a 0 sinó que és un valor constant = $6/\pi^2$ = 0,607927 ... = 60,7927 ... %.

Intervals entre nombres primers consecutius

Definim la funció g(p) com al nombre de nombres compostos que hi ha entre el nombre primer p_n i el nombre primer consecutiu, de manera que $p_{n+1} = p_n + g(p_n) + 1$.

g(p) ve del mot anglès "gap" que vol dir interval. Tenim p. ex. g(11) = 1, g(13) = 3, (23) = 5.

A partir del Teorema dels nombres primers, es pot calcular el valor mitjà d'aquest interval entre els nombres primers menors d'n, que resulta ser n / [n/ln(n)] = ln(n).

Ara bé, quins són els valors més petits i més grans possibles d'aquest interval?

Si algun dia s'aconsegueix demostrar que hi ha infinits parells de nombres primers veïns o bessons, aleshores resultaria que el menor valor possible de g(p) seria = 1, però això encara no està demostrat.

En canvi, sí que és fàcil de demostrar que per a qualsevol nombre n-1, per gran que sigui, sempre és possible trobar dos nombres primers consecutius que estiguin allunyats l'un de l'altre per n-1 unitats. En efecte, tots els nombres de la successió (n-1 en total) n!+2, n!+3, n!+4, ... n!+n, són compostos, ja que són respectivament divisibles per 2, 3, 4, ... i n.

Lloc de primera aparició dels diferents intervals entre nombres primers consecutius

En la taula següent es pot veure el nombre primer a partir del qual apareix per primera vegada un interval determinat, p. ex. un interval de 3 nombres compostos abans del nombre primer següent apareix per primera vegada després del 7, i un interval de 17 nombres compostos consecutius apareix per primera vegada després del 523. Observem que "sembla" que els intervals més grans van apareixen també després de nombres primers més grans, però no ho puc assegurar, ni tan sols conjecturar, perquè aquesta taula és incompleta.

Gap	After	Gap	After	Gap	After	Gap	After
0	2	33	1.327	117	$1_1$349.533	247	$191_1$912.783
1	3	35	9.551	131	$1_1$357.201	249	$387_1$096.133

3	7	43	15.683	147	2$_1$010.733	281	436$_1$273.009
5	23	51	19.609	153	4$_1$652.353	287	1.294$_1$268.491
7	89	71	31.397	179	17$_1$051.707	291	1.453$_1$168.141
13	113	85	155.921	209	20$_1$831.323	319	2.300$_1$942.549
17	523	95	360.653	219	47$_1$326.693	335	3.842$_1$610.773
19	887	111	370.261	221	122$_1$164.747	353	4.302$_1$407.359
21	1.129	113	492.113	233	189$_1$695.659	381	10.726$_1$904.659

A més dels nombres indicats a la taula, p. ex. després del nombre 218$_2$209.405$_1$436.543 hi ha un interval de 950 nombres compostos seguits.

Si ara definim una funció $p_n(g)$ com al primer nombre primer que té almenys g nombres compostos al darrera, hi ha una conjectura de Shanks, de 1964, que diu que $p_n(g)$ és una funció assimptòtica amb $\sqrt{g}$. Tanmateix ho he provat amb el darrer nombre de la taula precedent i dóna un error considerable, potser aquesta conjectura només serveix per a nombres enormement més grans.

Nombres primers de característiques particulars

Nombres primers bessons

Bessons o veïns. Atès que dos nombres consecutius no poden ser mai tots dos primers perquè sempre n'hi ha un que és parell, es diu que dos nombres primers són bessons o veïns quan són nombres senars consecutius.

P. ex. (fins a 100): 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, 29 i 31, 41 i 43, 59 i 61, 71 i 73.

També són primers bessons 1.000.000.000.061 i 1.000.000.000.063.

La quantitat de nombres primers bessons o veïns és la següent:

Fins a 1.000.000	8.169
Fins a 100.000.000	440.312
Fins a 10.000.000.000	27.412.679

Es deu tractar del nombre de parells i no del nombre total, ja que a la segona columna hi ha quantitats senars.

Així com s'ha demostrat que la suma dels inversos dels nombres primers tendeix a infinit (igual com la suma dels inversos dels nombres naturals), en canvi s'ha demostrat que la suma dels inversos dels nombres primers bessons és finita i tendeix al valor 1,902160578 ... anomenat constant de Brun (1919)

$1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + 1/19 + 1/29 + 1/31 ... = 1,902160578...$

Els nombres primers bessons més grans que es coneix són:

$33.218.925*2^{169.690} \pm 1$

Es conjectura que hi ha infinits parells de nombres primers bessons, però no s'ha demostrat ni si ni no.

Nombres (primers o compostos) **de Mersenne**

Són nombres de Mersenne tots aquells que pertanyen a la successió $M_n = 2^n - 1$.

Compte, que no tots els membres d'aquesta successió són nombres primers, ni molt menys! Per ara només se'n coneix 39 que siguin primers!

P. ex. , són primers M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}, M_{17}, M_{19}, M_{31}, M_{61}, M_{89}, M_{107}, etc.

Perque M_n sigui primer, cal que n sigui primer. Si n és compost, M_n també és compost.

Ara bé, que n sigui primer és condició necessària però no suficient. Hi ha nombres M amb subíndex primer que no són primers, p. ex.M_{11} = 2.047 = 23 x 89 té subíndex primer però és un nombre compost.

Tampoc no és segur que M_n sigui primer quan n sigui no un nombre primer qualsevol sinó un nombre primer de Mersenne, p. ex.: M_{13} = 8.191, i $M_{8.191}$ (que té 2.466 dígits) és un nombre compost.

La taula dels primers 40 nombres de Mersenne és aquesta:

n (exponent de 2)	Mn		Divisibilitat	Subíndex
1	1		primer	primer
2	3		primer	primer
3	7		primer	primer
4	15		divisible per 3 i 5	compost
5	31		primer	primer
6	63		divisible per 3 i 31	compost
7	127		primer	primer
8	255		divisible per 3, 5 i 17	compost
9	511		divisible per 7 i 73	compost
10	1.023		divisible per 3, 11 i 31	compost
11	2.047		***divisible per 23 i 89***	***primer***
12	4.095		divisible per 3, 5, 7 i 13	compost
13	8.191		primer	primer
14	16.383		divisible per 3, 43 i 127	compost
15	32.767		divisible per 7, 31 i 151	compost
16	65.535		divisible per 3, 5, 7 i 257	compost
17	131.071		primer	primer
18	262.143		divisible per 3, 7, 19 i 219	compost
19	524.287		primer	primer
20	1.048.575		divisible per 3, 5, 11 i 29	compost
21	2.097.151		compost	compost
22	4.194.303		compost	compost
23	8.388.607		***compost***	***primer***
24	16.777.215		compost	compost
25	33.554.431		compost	compost
26	67.108.863		compost	compost
27	134.217.727		compost	compost
28	268.435.455		compost	compost
29	536.870.911		***compost***	***primer***
30	1.073.741.823		compost	compost
31	2.147.483.647		primer	primer
32	4.294.967.295		compost	compost
33	8.589.934.591		compost	compost
34	17.179.869.183		compost	compost
35	34.359.738.367		compost	compost

36	68.719.476.735		compost	compost
37	137.438.953.471		***compost***	***primer***
38	274.877.906.943		compost	compost
39	549.755.813.887		compost	compost
40	1.099.511.627.775		compost	compost

Nombres perfectes

Els nombres primers de Mersenne (2^n - 1) tenen la propietat que multiplicats per 2^{n-1} donen lloc als anomenats nombres perfectes, que són iguals a la suma de tots els seus divisors (llevat d'ells mateixos).

P. ex. $M_5 = 2^5 - 1 = 31$

$(2^5 - 1) \times 2^{5-1} = 31 \times 2^4 = 31 \times 16 = 496$

Els divisors de 496 són 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 i 248, que sumen 496.

Un altre exemple: $M_7 = 2^7 - 1 = 127$

$(2^7 - 1) \times 2^{7-1} = 126 \times 2^6 = 127 \times 64 = 8.128$

Els divisors de 8.128 són 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1.016, 2.032 i 4.064, que sumen 8.128

Nombres primers més grans coneguts

Esbrinar si un nombre natural molt gran qualsevol és primer o és compost és una feina molt llarga i difícil, encara que només calgui anar dividint pels nombres primers < √n.

Avui dia, això es fa mitjançant programes d'ordinador, però ni amb ordinadors molt potents no és pràctic a partir de nombre de 20 dígits (> 50 h), o 10.000 M anys per a 50 dìgits. Tanmateix, s'ha trobat metodes alternatius matemàticament vàlids que ho permeten saber tan sols en uns 15s.

Tanmateix, és més fàcil de comprovar si un nombre de Mersenne és primer o no ho és, que no pas un altre nombre qualsevol, per això els nombres primers més grans coneguts tots són nombres (primers) de Mersenne.

Aquests nombres ara es busquen amb l'ajuda de molts aficionats que tenen els seus ordinadors en marxa fe.nt córrer un programa anomenat GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), de manera semblant al que es fa amb el programa SETI, de cerca de senyals intel·ligents extraterrestres.

L'$NPM_{23} = M_{11.213}$ va ser descobert el 1963 a la Universitat d'Illinois, i en van quedar tan satisfets, que mentre no es va descobrir el següent, van fer figurar aquest nombre en el matasegells de les cartes que enviaven.

Uns altres nombres primers de Mersenne molt alts són $M_{1.298.269}$ i $M_{2.976.221}$.

El nombre primer de Mersenne més alt trobat en el moment (1998) d'escriure el llibre "The Language of Mathematics" era l'anomenat nombre de Clarkson, $M_{3.021.377}$, que té 909.526 dígits. Posat per escrit ompliria un llibre de 500 pàgines, i escrit tot seguit tindria 2,5 km de llarg.

Més recentment, en una informació de desembre 2001, es diu que el nombre primer més elevat que s'havia trobat fins a aquella data (per Michael Cameron), és $M_{13.466.917}$, que té 4.053.496 dígits.

Els 3 més grans coneguts fins ara són aquests:

$NPM_{39?} = M_{13.466.917} = 2^{13.466.917} - 1$, de 4.053.946 dígits.

$NPM_{38} = M_{6.972.593} = 2^{6.972.593} - 1$, de 2.098.960 dígits.

$NPM^{37} = M_{3.021.377} = 2^{3.021.377} - 1$, de 909.526 dígits.

El nombre més gran d'aquests 3 i rècord actual, encara no se sap ben bé si és el NPM_{39} o bé si entre aquest i l'NPM_{38} n'hi ha algun altre que s'ha escapat a les indagacions. Si hi fos, aleshores aquest nombre no seria l'NPM_{39}, sinó el 40, el 41, o el que fos.

Sembla que aviat es trobarà el primer nombre primer de més de 10.000.000 de dígits.

La taula completa dels nombres primers de Mersenne trobats fins ara és aquesta:

Exponent n o nº d'ordre M_n	Nº d'ordre NPM	Nº de dígits d' M_n	Nº de dígits en el nº perfecte corresponent	Any de descobriment
2	1	1	1	---
3	2	1	2	---
5	3	2	3	---
7	4	3	4	---
13	5	4	8	1456
17	6	6	10	1588
19	7	6	12	1588
31	8	10	19	1772
61	9	19	37	1883
89	10	27	54	1911
107	11	33	65	1914
127	12	39	77	1876
521	13	157	314	1952
607	14	183	366	1952
1.279	15	386	770	1952
2.203	16	664	1.327	1952
2.281	17	687	1.373	1952
3.217	18	969	1.937	1957
4.253	19	1.281	2.561	1961
4.423	20	1.332	2.663	1961
9.689	21	2.917	5.834	1963
9.941	22	2.993	5.985	1963
11.213	23	3.376	6.751	1963
19.937	24	6.002	12.003	1971
21.701	25	6.533	13.066	1978
23.209	26	6.987	13.973	1979
44.497	27	13.395	26.790	1979
86.243	28	25.962	51.924	1982
110.503	29	33.265	66.530	1988
132.049	30	39.751	79.502	1983
216.091	31	65.050	130.100	1985
756.839	32	227.832	455.663	1992
859.433	33	258.716	517.430	1994
1.257.787	34	378.632	757.263	1996

1.398.269	35	420.921	841.842	1996
2.976.221	36	895.932	1.791.864	1997
3.021.377	37	909.526	1.819.050	1998
6.972.593	38	2.098.960	4.197.919	1999
13.466.197	39 ??	4.053.946	8.107.892	2001

De la taula de nombres de Mersenne es veu que a mida que es va avençant, els nombres de la successió que són primers van escassejant cada vegada més (cosa que també passa amb els nombres primers "normals"), però no s'ha pogut demostrar si a partir d'un cert punt ja no n'hi ha cap més, o bé si malgrat això n'hi ha infinits (cosa que sí que està demostrada per als nombres primers "normals").

Nombres primers factorials

Òbviament els factorials no són nombres primers, però s'anomena nombres primers factorials els de la forma n!+1 o bé n!-1. Fins a n = 10.000 tenim aquests:

De la forma n!+1, per a n = 1, 2, 3, 11, 27, 37, 41, 73, 77, 116, 154, 320, 340, 399, 427, 872, 1.477 i 6.380 (de 21.570 dígits).

De la forma n!-1, per a n = 3, 4, 5, 7 12, 14, 30, 32, 33, 38, 94, 166, 324, 469, 546, 974, 1.963, 3.507, 3.610 i 6.917 (de 23.560 dígits)

Els rècords, fins ara, són: 34.790!+1 (de 142.891 dígits) i 21.480!-1 (de 83.727 dígits).

Es conjectura que hi ha infinits nombres primers factorials, però no s'ha demostrat si hi són o si no hi són.

Nombres primers primorials

Són els que tenen la forma n# ± 1, essent # com un factorial restringit, o sigui no pas el producte de tots els nombres de l'1 fins a n sinó només el producte dels nombres primers de l'1 fins a n.

El nombre primer primorial més gran conegut és 392.113# + 1.

I amb el signe - és 15.877# - 1.

Es conjectura que hi ha infinits nombres primers primorials, però no s'ha demostrat si hi són o si no hi són.

Nombres primers de Fibonacci

Es tracta de veure quins nombres de Fibonacci són primers i quins no ho son.

Es demostra que F_n és divisor que tots els nombres de Fibonacci, el subíndex (o nº d'ordre) dels quals és múltiple d'n. P. ex. F_5 (5) és divisor d'F_{10} (55), F_{15} (610), F_{20} (6.765), etc., o bé F_7 (13) és divisor d'F_{14} (233), F_{21} (10.946), F_{28} (317.811), etc.

Per tant, perquè un nombre de Fibonacci pugui ser primer, cal que tingui subíndex primer (és una condició necessària però no suficient), amb l'excepció d'F_4 = 3.

S'ha comprovat que són primers els nombres de Fibonacci amb subíndex 3, 4, 5, 7, 11, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 571, 2.971, 4.723, 5.387, 9.311, 9.677, 14.431, 25.561, 30.757, 35.999 i 81.839, aquest darrer amb 17.103 dígits.

Se sospita que també són primers els nombres de Fibonacci amb subíndex 37.511, 50.833, 104.911, 130.021, 148.091, 201.107, 397.379 i 433.781, però encara no s'ha pogut comprovar amb seguretat.

No sé si tots els altres nombres de Fibonacci que no estan en aquestes dues darreres llistes està comprovat que són compostos o no està comprovat.

Es conjectura que hi ha infinits nombres primers de Fibonacci, però no s'ha demostrat si hi són o si no hi són.

Nombres primers de Lucas

Els nombres de Lucas vénen a ser com els de Fibonacci però en lloc de començar amb 1, 1 i anar-los sumant sempre de 2 en 2, es comença amb 1 i 3.

Aquesta successió té algunes propietats que s'assemblen a les de la de Fibonacci, pero ara no cal entrar en detalls.

S'ha comprovat que són primers els nombres de Lucas amb subíndex 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 167, 19, 31, 37, etc, en total fins a 41 nombres, fins a 51.169, aquest darrer amb 10.694 dígits).

Se sospita que també són primers 6 nombres de Lucas encara més grans, fins al que té subíndex 202.667.

També es conjectura que hi ha infinits nombres primers de Lucas, però no s'ha demostrat si hi són o si no hi són.

Nombres primers consecutius en progressió aritmètica

Per poder parlar de progressió aritmètica, almenys cal tenir un grup de 3 nombres primers consecutius, tals que la diferència del segon al primer sigui igual a la diferència del tercer al segon.

Teorema de Dirichlet: Si a i b són nombres primers entre si, a la progressió aritmètica a+b, a+2b, a+3b ... a +nb hi ha infinits nombres primers. Ara bé, aquest teorema no diu que els nombres que siguin primers dintre de la progressió siguin consecutius.

Aquest teorema tampoc no diu que per a qualsevol enter n, hi ha n nombres primers en qualsevol d'aquestes progressions. Es conjectura que sí que hi són, però això no s'ha demostrat ni tan sols per a n = 3. Per a n = 3 s'ha demostrat que sí que hi són si s'elimina la condició que siguin consecutius.

En aquest apartat, també hi ha el tema de trobar la progressió aritmética formada per nombres més grans i la progressió aritmètica més llarga.

Sembla que els 3 nombres primers més grans coneguts que estan en progressió aritmètica comencen per aquest:

$3.247.803 \times 2^{229.377} - 82.953.297 \times 2^{180.000} - 1$ i que la raó de la progressió és:

$3.247.803 \times 2^{229.376} - 82.953.297 \times 2^{180.000}$

Progressions aritmètiques llargues:

Una senzilla progressió de 5 termes és la formada pels nombres 5, 11, 17, 23 i 29, de raó 6. El 1967 es va descobrir progressions de 5 i de 6 termes:

$10^{10} + 24.493 + 30\,k$ (5 termes).

$121_{1}174.811 + 30\,k$ (6 termes).

Després ja es va trobar progressions de 7, 8, 9 i 10 termes (nombres primers consecutius).

Aquesta darrera, de moment és la més llarga coneguda. Comença per un nombre de 93 dígits i que té per raó un nombre sorprenentment tan baix com el 210. Aquest nombre és el següent:

$$100_{15}996.972_{14}469.714_{13}247.637_{12}786.655_{11}587.969_{10}840.329_{9}509.324_{8}$$
$$689.190_{7}041.803_{6}603.417_{5}758.904_{4}341.703_{3}348.882_{2}159.067_{1}229.719$$

Nombres primers de Sophie Germain

Són aquells nombres primers p, tals que 2p+1 també és primer. Els primers nombres d'aquesta llista són 2, 3, 5, 11, 23, 41, 53, 83, 89, 113, 131, etc.

El seu interès és que Sophie Germain va demostrar el 1825, que per a aquests nombres primers es complia el Teorema de Fermat.

La quantitat de nombres primers de Sophie Germain que hi ha és aquesta:

Fins a 1.000	37
Fins a 100.000	1.171

Fins a 10.000.000	56.032
Fins a 100.000.000	423.140
Fins a 1.000.000.000	3.308.859
Fins a 10.000.000.000	26.569.515

El nombre primer de Sophie Germain més gran que es coneix és $2.540_1 041.185*2^{114.729} - 1$.

Es conjectura que hi ha infinits nombres primers de Sophie Germain, però no s'ha demostrat si hi són o si no hi són.

Teorema de Fermat

L'equació $z^n = x^n + y^n$ no té solucions enteres per a $n > 2$.

Fermat va anotar que n'havia trobat una demostració però no la va deixar escrita.

Va morir el 1665 i aquest teorema no s'ha aconseguit demostrar fins més de 300 anys més tard, el 1994, pel matemàtic anglès Andrew Wiles. La demostració és molt complexa i requereix l'ús de conceptes matemàtics que a l'època de Fermat encara no s'havien desenvolupat, de manera que avui es creu que la pretesa demostració de Fermat devia tenir algun error, i també es creu que molt possiblement sí que ho podia haver demostrat per a n = 4.

El 1753, Euler va dir que ho havia demostrat per a n = 3, però a la seva demostració hi havia un error que la invalidava.

El 1825, Dirichlet i Legendre el van demostrar per a n = 5 i, el 1839 Gabriel Lamé el va demostrar per a n = 7.

També es va demostrar que si es demostrava la validesa del teorema per a tots els exponents primers, aleshores seria cert per a tots els exponents.

El 1847, Ernst Kummer va demostrar que era cert per a tots els nombres primers que complien unes certes condicions molt complexes, que ell anomenava "primers regulars". A partir d'això, es va poder demostrar la certesa del teorema per a tots els exponents fins a 36, i per a tots els exponents primers < 100, excepte 37, 59 i 67.

El 1980 es va aconseguir demostrar que el teorema de Fermat era cert fins a N = 4.000.000, i el 1994 va ser quan es va trobar la demostració per a qualsevol valor de n.

Cadena de Cunningham de 1ª classe

Les cadenes de Cunningham són una generalització dels nombres primers de Sophie Germain.

Una cadena de Cunningham de 1ª classe i de llargada k és una seqüència de k nombres primers, cadascun dels quals és el doble de l'anterior + 1, de manera que els nombres primers de Sophie Germain són cadenes de Cunningham de 1ª classe de llargada k = 2.

P. ex. 2, 5, 11, 23 i 47 (llargada 5).

89, 179, 359, 719, 1.439 i 2.879 (llargada 6)

Sembla que per a cada valor de k hi ha infinites cadenes de llargada k, però no s'ha demostrat si hi són o si no hi són.

Cadena de Cunningham de 2ª classe

És una seqüència de nombres primers, cadascun dels quals és el doble de l'anterior - 1.

P. ex. 2, 3 i 5 (llargada 3).

1.531, 3.061, 6.121, 12,241 i 24,481 (llargada 5).

Nombres primers capicua

Tot i que els nombres primers no tenen cap paper significatiu en les matemàtiques, també hi ha qui s'ha entretingut a buscar nombres primers capicua. P. ex. fins a 1000 n'hi ha 14: El 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919 i 929.

El nombre primer capicua més gran que es coneix és el $10^{104.281} - 10^{52.140} - 1$.

Per cert, algú sabria calcular molt ràpidament quants nombres primers capicua hi ha de 4 dígits?

Nombres primers únics

Aquesta és una classe de nombres primers molt rara. Sabem que l'invers d'un nombre primer, excepte el 2 i el 5) és una fracció decimal periòdica pura, que té un període d'una cert llargada. P. ex:

1/3 = 1,3333... amb període 3, d'1 dígit de llargada.
1/11 = 0,0909... amb període 09, de 2 dígits de llargada.
1/37 = 0,027027... amb període 027, de 3 dígits de llargada.
1/101 = 0,00990099... amb període 0099, de 4 dígits de llargada.

S'ha comprovat que no hi ha altres nombres primers fora d'aquests esmentats, els inversos dels quals tinguin 1, 2, 3 o 4 dígits de llargada en el seu desenvolupament decimal. Per tant, aquests nombres primers són anomenats primers únics.

P. ex. 1/41 i 1/271, tots dos tenen períodes de 5 dígits de llargada.
1/7 i 1/13, tots dos tenen períodes de 6 dígits de llargada.
1/239 i 1/4.649, tots dos tenen períodes de 7 dígits de llargada.
... ...
1/353, 1/449, 1/641, 1/1.409 o 1/69.857, tots tenen períodes de 32 dígits de llargada.

Per tant, aquests darrers, 7, 13, 42, 29, 271, 353, 449, 641, etc. no són nombres primers anomenats únics, perquè no és únic i exclusiu per a ells el nombre de dígits dels períodes dels seus inversos respectius.

Ja es veu que amb una condició tant restrictiva, els nombres primers únics són raríssims. Fins a 10^{50} hi ha més de 10^{47} nombres primers (més d'un 1 $^{o}/_{oo}$), però només se n'ha trobat 18 que siguin únics.

Quina és la llista més llarga de nombres primers?

La resposta és que una llista rècord no hi és, perquè fins a 1.000.000.000, amb programes d'ordinador es va més de pressa a veure si un nombre és primer o no, que no pas a trobar-lo dintre d'una llista de nombres primers, que té a prop de 58 milions de nombres!

I llistes molt més extenses ocupen molt espai a les memòries. De totes maneres, a internet es pot trobar una llista d'almenys 98 milions de nombres primers.

A vegades la pregunta és de quin és el primer nombre que no se sap si és primer o no? Respecte a això cal dir, que si tal nombre fos conegut, tant sols en 1 segon ja fóra possible trobar els nombres primers del següent milió, o sigui que no acabaríem mai.

Llista de nombres primers a l'atzar entre 10 i 100 dígits

Segueixen aquestes llistes, que poden servir per provar algorismes o programes informàtics, però que no seria prudent usar per a encriptació de missatges, atès que han estat publicats a internet i poden ser coneguts per molta gent.

Ten random 10 digit primes

5915587277
1500450271
3267000013
5754853343
4093082899
9576890767
3628273133
2860486313

5463458053
3367900313

Ten random 20 digit primes
48112959837082048697
54673257461630679457
29497513910652490397
40206835204840513073
12764787846358441471
71755440315342536873
45095080578985454453
27542476619900900873
66405897020462343733
36413321723440003717

Ten random 30 digit primes
671998030559713968361666935769
282174488599599500573849980909
521419622856657689423872613771
362736035870515331128527330659
115756986668303657898962467957
590872612825179551336102196593
564819669946735512444543556507
513821217024129243948411056803
416064700201658306196320137931
280829369862134719390036617067

Ten random 40 digit primes
2425967623052370772757633156976982469681
1451730470513778492236629598992166035067
6075380529345458860144577398704761614649
3615415881585117908550243505309785526231
5992830235524142758386850633773258681119
4384165182867240584805930970951575013697
5991810554633396517767024967580894321153
6847944682037444681162770672798288913849
4146162919458530168953357282201621124057
5570373270183181665098052481109678989411

Ten random 50 digit primes
22953686867719691230002707821868552601124472329079
30762542250301270692051460539586166927291732754961
29927402397991286489627837734179186385188296382227
46484729803540183101830167875623788794533441216779
95647806479275528135733781266203904794419563064407
64495327731887693539738558691066839103388567300449
58645563317564309847334478714939069495243200674793
48705091355238882778842909230056712140813460157899
15452417011775787851951047309563159388840946309807
53542885039615245271174355315623704334284773568199

Ten random 60 digit primes
622288097498926496141095869268883999563096063592498055290461
610692533270508750441931226384209856405876657993997547171387
668486051696691190102895306426999370394054817506916629001851
313539589974026666385010319707341761012894704055733952484113
470287785858076441566723507866751092927015824834881906763507
361720912810755408215708460645842859722715865206816237944587
378348910233465647859184421334615532543749747185321634086219
669483106578092405936560831017556154622901950048903016651289
351300033958683656629281197430236951045077917074227778834807
511704374946917490638851104912462284144240813125071454126151

Ten random 70 digit primes
4669523849932130508876392554713407521319117239637943224980015676156491
4906275427767802358357703730938087362176142642699093827933107888253709
2409130781894986571956777721649968801511465915451196376269177305066867
7595009151080016652449223792726748985452052945413160073645842090827711
3822535632033509464266159811805197854872067042990716005808372194664933
5885903965180586669073549360644800583458138238012033647539649735017287
5850725702766829291491370712136286009948642125131436113342815786444567
4237080979868607742750808600846638318022863593147774739556427943294937
3773180816219384606784189538899553110499442295782576702222280384917551
9547848065153773335707495885453566120069130270246768806790708393909999

Ten random 80 digit primes
18532395500947174450709383384936679868383424444311405679463280782405796233163977
39688644836832882526173831577536117815818454437810437210221644553381995813014959
44822481511601066098713481453161748979849764719554039096395688045048053310178487
54875133386847519273109693154204970395475080920935355580245252923343305939004903
40979218404449071854385509743772465043384063785613460568705289173181846900181503
56181069873486948735852120493417527485226565150317825065106074926567306630125961
19469495355310348270990592580191998639221450743640952620236903851789700309402857
34263233064835421125264776608163440537925705997962346596977803462033841059628723
14759984361802021245410475928101669395348791811705709117374129427051861355011151
67120333368520272532940669112228025474970578938046280618394371551488988323794243

Ten random 90 digit primes
282755483533707287054752184321121345766861480697448703443857012153264407439766013042402571
370332600450952648802345609908335058273399487356359263038584017827194636172568988257769601
463199005416013829210323411514132845972525641604435693287586851332821637442813833942427923
374413471625854958269706803072259202131399386829497836277471117216044734280924224462969371
664869143773196608462001772779382650311673568542237852546715913135688434614731717844868261
309133826845331278722882330592890120369379620942948199356542318795450228858357445635314757
976522637021306403150551933319006137720124048624544172072735055780411834104862667155922841
635752334942676003169313626814655695963315290125751655287486460091602385142405742365191277
625161793954624746211679299331621567931369768944205635791355694727774487677706013842058779
204005728266090048777253207241416669051476369216501266754813821619984472224780876488344279

Ten random 100 digit primes
2074722246773485207821695222107608587480996474721117292752992589912196684750549658310084416732550077
2367495770217142995264827948666809233066409497699870112003149352380375124855230068487109373226251983
1814159566819970307982681716822107016038920170504391457462563485198126916735167260215619523429714031
5371393606024775251256550436773565977406724269152942136415762782810562554131599074907426010737503501

6513516734600035718300327211250928237178281758494417357560086828416863929270451437126021949850746381
5628290459057877291809182450381238927697314822133923421169378062922140081498734424133112032854812293
2908511952812557872434704820397229928450530253990158990550731991011846571635621025786879881561814989
2193992993218604310884461864618001945131790925282531768679169054389241527895222169476723691605898517
5202642720986189087034837832337828472969800910926501361967872059486045713145450116712488685004691423
7212610147295474909544523785043492409969382148186765460082500085393519556525921455588705423020751421

Conjectures encara no resoltes avui dia

Ja n'hem comentades unes quantes i n'hi afegirem encara uns quantes més de significatives per acabar el tema.

Conjectura de Goldbach

Potser aquesta és la conjectura més famosa de totes.

Tot nombre parell > 2 és suma de 2 nombres primers.

P. ex.: $4 = 2 + 2$ $6 = 3 + 3$ $8 = 3 + 5$ $10 = 5 + 5$ $12 = 5 + 7$ $14 = 7 + 7$ $16 = 3 + 13$, etc.

Tot i que s'ha comprovat que la conjectura es compleix almenys fins a 4×10^{14}, encara no se sap si és certa o si no ho és. Està demostrat que aquesta conjectura és equivalent a aquesta altra (això vol dir que o totes dues són certes o totes dues són falses): Qualsevol enter > 17 és suma de 3 nombres primers diferents.

Sí que s'ha demostrat que qualsevol enter parell és la suma de 6 nombres primers com a màxim. També s'ha demostrat que qualsevol enter suficientment gran és la suma d'un nombre primer més un nombre de no més de 2 factors (o sigui un altre primer o bé un compost de només 2 factors). D'aquests nombres de només 2 factors diguem-me P_2.

Conjectura sobre els nombres parells

No se sap si un nombre parell qualsevol sempre és diferència entre dos nombres primers, però està demostrat que sempre es pot expressar com a la diferència entre un nombre primer i un nombre P_2.

Conjectura de Goldbach dels nombres senars

Qualsevol nombre senar > 5 és la suma de tres nombres primers (no necessàriament diferents).

P. ex.:

$7 = 5 + 1 + 1$	$9 = 7 + 1 + 1$	$11 = 7 + 3 + 1$	$13 = 7 + 5 + 1$
$15 = 7 + 5 + 3$	$17 = 11 + 5 + 1$, etc		

De totes maneres, el 1937 es va demostrar que aquesta conjectura era certa per a $n > 3$^$3^{15} = 3^{14.348.907}$, i el 1989 es va demostrar que era certa per a $n > 10^{43.000}$.

Això vol dir que si es comprova manualment o informàticament que també es compleix per a tots i cada un dels valors d'n inferiors, ja quedaria demostrada en la seva totalitat.

Hi ha infinits nombres primers de Mersenne?

No se sap.

Hi ha infinits nombres compostos de Mersenne?

Tampoc no se sap, però s'ha demostrat que si hi ha infinits nombres primers de Sophie Germain (primers p, tals que són primers alhora p i 2p+1) o bé de la forma 4p+3, aleshores sí que hi ha infinits nombres compostos de Mersenne.

Hi ha nombres perfectes senars?

Hem vist que l'expressió $(2^n - 1)*2^{n-1}$ donava nombres perfectes (iguals a la suma de tots els seus divisors) quan $M_n = 2^n - 1$ era un nombre primer (anomenat de Mersenne), però tots aquests nombres perfectes ja es veu que són nombres parells. Que tots aquests nombres siguin perfectes no significa que siguin els únics i que no n'hi pugui haver de senars, però de moment no se n'ha trobat cap i no se sap si n'hi pot haver o no.

Només s'ha demostrat que si n'hi ha cap:

a/ és igual a un quadrat perfecte multiplicat per la potència senar d'un nombre primer.
b/ ha de ser divisible per almenys 8 nombres primers diferents.
c/ ha de tenir almenys 37 divisors primers, no necessàriament diferents.
d/ ha de tenir més de 300 dígits.
e/ ha de tenir un divisor primer > 10^{20}.

Conjectura de Polignac

Per a qualsevol nombre parell 2n, hi ha infinits parells de nombres primers consecutius que difereixen en 2n.

Per a n = 1, això equival a la conjectura de la infinitud dels nombres primers bessons.

Conjectura d'n^2+1?

Hi ha infinits nombres primers que siguin un quadrat perfecte més 1? P. ex. 5, 17, 37, 197, 257, etc. No se sap.

Conjectura dels quadrats perfectes consecutius

No se sap si sempre hi ha almenys un nombre primer entre n^2 i $(n+1)^2$. P. ex. entre 99^2 = 9.801 i 100^2 = 10.000, n'hi ha 20 (el 9.803, 9.811, 9.817, 9.829, 9.839, 9.851, 9.857, 9.859, 9.871, 9.883, 9.887, 9.901, 9.907, 9,923, 9,929, 9.931, 9.941, 9.949, 9.967 i el 9.973) Sembla que sí que sempre n'hi ha almenys 1, però no s'ha demostrat.

Una altra conjectura sobre progressions aritmètiques

Hi ha infinits grups de 3 nombres primers consecutius en progressió aritmètica? No se sap, però està demostrat que sí que hi són si eliminem la condició que siguin consecutius.

Un nombre primer curiós

El nombre 73.939.133 és un nombre molt curiós perquè és un nombre primer, però si li anem suprimint totes les xifres pel darrera sempre resulten nombres primers: 7.393.913 - 739.391 - 73.939 - 7.393 - 739 - 73 - 7. És el nombre més gran conegut que té aquesta propietat.

Per acabar

Deia un famós matemàtic del CalTech, que si sou capaços de resoldre qualsevol d'aquestes conjectures, el vostre nom viurà per tota l'eternitat en l'espai de la fama matemàtica.

2004-03-23

First 1,000 Primes (the 1,000th is 7919)

For more information on primes see http://www.utm.edu/research/primes

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349

353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997	1009	1013
1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151
1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223
1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373
1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451
1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583
1597	1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657
1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733
1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811
1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877	1879	1889
1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053
2063	2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113	2129
2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213
2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281	2287
2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357
2371	2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423
2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531
2539	2543	2549	2551	2557	2579	2591	2593	2609	2617
2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687
2689	2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731	2741
2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797	2801	2803	2819
2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897	2903
2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971	2999
3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079
3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181
3187	3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253	3257
3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319	3323	3329	3331
3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413
3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511
3517	3527	3529	3533	3539	3541	3547	3557	3559	3571
3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623	3631	3637	3643
3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719	3727
3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793	3797	3803	3821
3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889	3907
3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989
4001	4003	4007	4013	4019	4021	4027	4049	4051	4057
4073	4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139
4153	4157	4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229	4231
4241	4243	4253	4259	4261	4271	4273	4283	4289	4297
4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391	4397	4409
4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493
4507	4513	4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567	4583
4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643	4649	4651	4657
4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723	4729	4733	4751
4759	4783	4787	4789	4793	4799	4801	4813	4817	4831
4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933	4937
4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987	4993	4999	5003
5009	5011	5021	5023	5039	5051	5059	5077	5081	5087

5099	5101	5107	5113	5119	5147	5153	5167	5171	5179
5189	5197	5209	5227	5231	5233	5237	5261	5273	5279
5281	5297	5303	5309	5323	5333	5347	5351	5381	5387
5393	5399	5407	5413	5417	5419	5431	5437	5441	5443
5449	5471	5477	5479	5483	5501	5503	5507	5519	5521
5527	5531	5557	5563	5569	5573	5581	5591	5623	5639
5641	5647	5651	5653	5657	5659	5669	5683	5689	5693
5701	5711	5717	5737	5741	5743	5749	5779	5783	5791
5801	5807	5813	5821	5827	5839	5843	5849	5851	5857
5861	5867	5869	5879	5881	5897	5903	5923	5927	5939
5953	5981	5987	6007	6011	6029	6037	6043	6047	6053
6067	6073	6079	6089	6091	6101	6113	6121	6131	6133
6143	6151	6163	6173	6197	6199	6203	6211	6217	6221
6229	6247	6257	6263	6269	6271	6277	6287	6299	6301
6311	6317	6323	6329	6337	6343	6353	6359	6361	6367
6373	6379	6389	6397	6421	6427	6449	6451	6469	6473
6481	6491	6521	6529	6547	6551	6553	6563	6569	6571
6577	6581	6599	6607	6619	6637	6653	6659	6661	6673
6679	6689	6691	6701	6703	6709	6719	6733	6737	6761
6763	6779	6781	6791	6793	6803	6823	6827	6829	6833
6841	6857	6863	6869	6871	6883	6899	6907	6911	6917
6947	6949	6959	6961	6967	6971	6977	6983	6991	6997
7001	7013	7019	7027	7039	7043	7057	7069	7079	7103
7109	7121	7127	7129	7151	7159	7177	7187	7193	7207
7211	7213	7219	7229	7237	7243	7247	7253	7283	7297
7307	7309	7321	7331	7333	7349	7351	7369	7393	7411
7417	7433	7451	7457	7459	7477	7481	7487	7489	7499
7507	7517	7523	7529	7537	7541	7547	7549	7559	7561
7573	7577	7583	7589	7591	7603	7607	7621	7639	7643
7649	7669	7673	7681	7687	7691	7699	7703	7717	7723
7727	7741	7753	7757	7759	7789	7793	7817	7823	7829
7841	7853	7867	7873	7877	7879	7883	7901	7907	7919