INTERVALS MUSICALS

SEMPRE QUE PARLEM D'INTERVAL, DISTÀNCIA O DIFERÈNCIA ENTRE 2 NOTES O 2 SONS VOLEM DIR LA RELACIÓ O QUOCIENT ENTRE LES SEVES FREQÜÈNCIES RESPECTIVES.

Valor dels diferents intervals

Fins ara hem parlat molt d'intervals: de semitons, tons sencers, quartes, quintes, octaves, etc. però, tret de dir que l'octava més aguda representava una freqüència doble, encara no hem definit quines són les distàncies o, millor dit, les relacions de freqüència que corresponen a aquests intervals. Fins ara hem donat per entès que tots els tons eren iguals i que 2 semitons equivalien a 1 to, però això només és veritat en una de les escales que veurem i no és veritat en les altres.

Respecte a això hi ha diverses escales que no són ben coincidents, i parlarem de les següents:
Escala antiga o pitagòrica.
Escala de Zarlino, natural o harmònica.
Escala temprada.
De més a més, també parlarem d'alguns dels sistemes de temprament antics.

En tots ells l'octava és la relació de 2/1.

Mesures per a intervals molt petits

Per a intervals molt petits s'ha definit unes mesures que potser donen una idea més aproximada de l'interval que no pas les xifres decimals del quocient de les freqüències respectives.

El cent: És la unitat més petita per a comparar freqüències i és igual a 1/100 del semitò temprat, del qual parlarem més endavant i que equival a la dotzena part de l'8ª. Per tant, en una octava hi ha 1.200 cents, i 1 cent val: $\sqrt[1.200]{2}$ = 1,000 577 8
1 octava = 1.200 cents
1 to = 200 cents
1 semitò temprat = 100 cents
1 coma d'1/9 de to temprat = 22,2 cents

El savart: Es defineix de la manera següent:
1 savart = 1.000 log de l'interval
Per tant, 1 octava té 1.000 log 2 = 301,030 savarts, tot i que un llibre diu que aquest valor s'arrodoneix a 301.

Altura del diapasó

L'altura del diapasó o freqüència de referència és un tema diferent del de les diferents escales que estudiarem, i tampoc no té res a veure amb les relacions entre intervals. És un valor arbitrari fixat per conveni, i el valor actual de la^3 = 440 Hz, es va fixar en una Conferència Internacional a Londres l'any 1939. En un llibre, d'aquesta nomenclatura en diu sistema franco-belga (en un altre llibre, del la = 440 Hz en diu la^1).

Històricament els valors del diapasó han sofert moltes variacions i, sobre tot, molta dispersió. El La^3 ha arribat a assolir valors que van des de 377 fins a 506 Hz, o sigui una diferència de més d'una 4ª. Valors notables han estat els següents:
1859 435 Hz. Decret Ministerial francès.
1863 440 Hz. *Tonempfindungen*, de Helmholtz.
1939 440 Hz. La ja esmentada conferència de Londres.

Una curiositat: Un llibre diu que si prenem La^3 = 426,7 Hz, les freqüències del Do resulten ser les successives potències de 2. Això és veritat si prenem l'escala de Zarlino (que veurem més endavant) amb l'interval Do **-** La = 5/3. Aleshores tenim: Do = 426,7**:**(5/3) = 256,02 Hz.

Escala pitagòrica

L'escala pitagòrica es feia servir durant l'edat mitjana i el renaixement, però ja no es feia servir a l'època barroca. Es basava únicament en els intervals de 5ª i 8ª. Se'n deia pitagòrica perquè l'interval de 5ª (relació 3/2) s'atribuïa a Pitàgoras.

Augmentant per 5es i baixant per 8es es pot trobar tots els intervals a l'interior de l'8ª. Partint d'un Do tenim:

Do = 1	= 1,000 000
Sol = 3/2	= 1,500 000
Re = $(3/2)^2$ = 9/4 = 9/8	Dividint per 2 per abaixar-lo una 8ª queda = 1,125 000
La = (9/8)x(3/2)= 27/16	= 1,687 500
Mi = (27/16)x(3/2) = 81/32 = 81/64	Dividint per 2 per abaixar-lo una 8ª queda = 1,265 625
Fa = una 5ª més baixa que el Do = 1/(3/2) = 2/3 = 4/3	Multiplicant per 2 per apujar-lo una 8ª queda = 1,333 333
Si b = una 5ª més baixa que el Fa = (4/3)**:**(3/2) = 8/9 = 16/9	Multiplicant per 2 per apujar-lo una 8ª queda = 1,777 777

etc. etc.

D'aquesta manera, les relacions de l'escala sencera (pujant per 5es) resulten ser aquestes:

La b = 128/81 = $2^7/3^4$	= 1,580 247
Mi b = 32/27 = $2^5/3^3$	= 1,185 185
Si b = 16/9 = $2^4/3^3$	= 1,777 777
Fa = 4/3 = $2^2/3^1$	= 1,333 333
Do = 1	= 1,000 000
Sol = 3/2	= 1,500 000
Re = 9/8 = $3^2/2^3$	= 1,125 000

La = 27/16 = $3^3/2^4$	= 1,687 500
Mi = 81/64 = $3^4/2^6$	= 1,265 265
Si = 243/128 = $3^5/2^7$	= 1,898 438
Fa # = 729/512 = $3^6/2^9$	= 1,423 828
Do # = 2.187/2.048 = $3^7/2^{11}$	= 1,067 871
Sol # = 6.561/4.096 = $3^8/2^{12}$	= 1,601 807

En resum: Els valors de les notes naturals respecte al Do queden així:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1	9/8	81/32	4/3	3/2	27/16	243/128	2

i les separacions entre notes consecutives resulten ser de:

Do-Re	Re-Mi	Mi-Fa	Fa-Sol	Sol-La	La-Si	Si-Do
9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243

Ja es veu que amb aquest sistema no es pot tancar mai el cicle, perquè una potència de 3/2 no coincidirà mai amb una potència de 2.
P. ex. el La b i el Sol # són diferents: La b = 1,580 247 i Sol # = 1,601 801
El Sol # és més alt que el La b.

La seva diferència és de $(3^8/2^{12})$**:**$(2^7/3^4) = 3^{12}/2^{19}$ = 531.441/524.288 = 1,013 643, anomenada coma pitagòrica.

El que va fer abandonar aquesta escala al final del renaixement és el resultat que dóna per a les 3es majors. En efecte:
Do-Mi = 81/64 = 1,265 265
Però el Mi que s'obté a partir del 5è harmònic és massa diferent, ja que val 5/4 = 1,250 000.
Ja hi ha una diferència audible entre un Mi i el 5è harmònic d'un Do inferior que soni simultàniament. Aquesta diferència està compresa entre 81/64 i 5/4 i és igual a (81/64)**:**(5/4) = 81/80 = 1,012 500 i val 21,5 cents.

De més a més, si la 3ª major resultava massa gran, la 3ª menor resultava massa petita, ja que les dues 3es han de sumar exactament una 5ª de 3/2.

També resultava massa petita la 6ª menor (3 tons + 2 semitons), que completava la 3ª major per arribar a una 8ª.

En resum: Resultava que en una escala pitagòrica, els intervals justos eren perfectament naturals, els intervals majors eren massa grans i els intervals menors eren massa petits. Mentre no es feia polifonia això no venia tant d'aquí, però després de l'època medieval i del renaixement, això ja no es va poder mantenir.

Tornem a veure tot això mateix però explicat d'una altra manera. En el sistema pitagòric les relacions o intervals fonamentals són les següents:

- to sencer	9/8 = 1,125	- quinta	3/2 = 1,500
- quarta	4/3 = 1,333	- octava	2/1 = 2

Això sembla molt senzill i molt bonic perquè aquestes relacions són molt simples, però hi ha greus problemes de falta d'exactitud.

En efecte:
- 3ª major = 2 semitons = 9/8 x 9/8 = 81/64 = $3^4/2^6$ = 1,265 625
Si la 4ª val 4/3 i es compon de 2 tons sencers i 1 semitò, aleshores tenim:
4/3 = 9/8 x 9/8 x 1 semitò, d'on resulta:
1 semitò = 4x8x8/3x9x9 = 256/243 = $2^8/3^5$ = 1,053 498
però, ai las! ara resulta que 2 semitons ja no equivalen a 1 to:
En efecte:
2 semitons = 256/243 x 256/243 = = 65.536/59.049 = $2^{16}/3^{10}$ = 1,053 498^2 = 1,109 858 < 1,125 !?
El semitò que resultaria de repartir 1 to en 2 parts iguals seria:
$\sqrt{9/8} = \sqrt{1{,}125}$ = 1,060 660 > 1,053 498 !?

La 5ª sí que resulta igual a una 4ª + 1 to: 4/3 x 9/8 = 3/2 = 1,500
L'8ª sí que resulta igual a una 4ª + una 5ª: 4/3 x 3/2 = 2

Per tant, aquesta escala pateix del defecte de la inexactitud dels semitons. Encara més: vegem què passa quan anem augmentant o disminuint successivament una nota per 5es. Partim p. ex. del Fa (perquè és la 1ª nota de la sèrie Fa-Do-Sol-Re-La-Mi-Si).

Fa^3	1	= 1			
Do^4	3/2	= 1,500			
Sol^4	9/4	= 2,250			
Re^5	27/8	= 3,375			
La^5	81/16	= 5,062 5			
Mi^6	243/32	= 7,593 75			
Si^6	729/64	= 11,390 625			
Fa # ^{7}	2.187/128	= 17,085 937	Sol b $^{-1}$	32/243	= 0,117 216
Do # ^{8}	6.561/256	= 25,628 906	Re b ^{1}	16/81	= 0,197 531

Sol # ^{8}	19.683/512	= 38,443 359	La b ^{1}	8/27	= 0,296 296
Re # ^{9}	59.049/1.024	= 57,665 039	Mi b ^{2}	4/9	= 0,444 444
La # ^{9}	177.147/2.048	= 86,487 558	Si b ^{2}	2/3	= 0,666 667

(fixem-nos que la 3ª i la 6ª columna són les successives potències d'1,5)

Si Fa # = Sol b,	entre Fa # ^{7} i Sol b $^{-1}$ hi ha d'haver exactament 7 octaves.
Si Do # = Re b,	entre Do # ^{8} i Re b $^{-1}$ hi ha d'haver exactament 7 octaves.
Si Sol # = La b,	entre Sol # ^{8} i La b $^{-1}$ hi ha d'haver exactament 7 octaves.
Si Re # = Mi b,	entre Re # ^{9} i Mi b $^{-2}$ hi ha d'haver exactament 7 octaves.
Si La # = Si b,	entre La # ^{9} i Si b $^{-2}$ hi ha d'haver exactament 7 octaves.

Però si dividim les freqüències respectives, en lloc de $2^7 = 128$, en tots els casos resulta 531.441/4.096 = $(3/2)^{12} = 1{,}5^{12}$ = 129,74633 (ja es veu que una potència de 2 no coincidirà mai amb una potència d'1,5!).

Aquesta és una altra inexactitud del sistema pitagòric: que quan es progressa indefinidament per 5^{es}, tampoc les 8^{es}. no resulten exactes: 12 quintes > 7 octaves.

El quocient entre 12 quintes i 7 octaves és igual a, p. ex:
$[(2.187/128)\mathbf{:}(32/243)]\mathbf{:}2^7 = 531.441/524.288 = 3^{12}/2^{19} = 1{,}013\ 643$
aquest interval és aproximadament 1/4 de semitò.
En efecte:
$\sqrt[4]{(256/243)} = 1{,}013\ 114 \approx 1{,}013\ 643$

Aquesta diferència entre 12 quintes i 7 octaves, també és exactament igual a la diferència entre 6 tons sencers i 1 octava.
En efecte:
$(9/8)^6 \mathbf{:} 2 = 3^{12}/2^{19} = 531.441/524.288 = 1{,}013\ 643$

Que 6 vegades el to sencer no dongui l'8ª exacta, això ja és més greu. Tanmateix, abans de deixar aquest sistema de banda, vegem el detall dels seus intervals i de les freqüències corresponents a cada nota, a partir de la referència de la^3 = 440 Hz.

		Intervals	
	Do - Re	$9/8 = 3^3/2^3$	= 1,125 000
3ª major	Do -Mi	$9/8 \text{ x } 9/8 = 81/64 = 3^4/2^6$	= 1,265 625
4ª	Do - Fa	$81/64 \text{ x } 256/243 = 4/3 = 2^2/3$	= 1,333 333
Tríton	Do - Fa #	$4/3 \text{ x } 256/243 = 1.024/729 = 2^{10}/3^6$	= 1,404 664
5ª	Do - Sol	4/3 x 9/8 = 3/2	= 1,500 000
6ª major	Do - La	$3/2 \text{ x } 9/8 = 27/16 = 3^3/2^4$	= 1,687 500
7ª major	Do - Si	$27/16 \text{ x } 9/8 = 243/128 = 3^5/2^7$	= 1,898 438
8ª	Do - Do	$243/128 \text{ x } 256/243 = 256/128 = 2^8/2^7$	= 2

		Freqüències de l'escala 3	
	Do	880/3 **:** 9/8 = 7.040/27	= 260,740 740
	Re	330 **:** 9/8 = 880/3	= 293,333 333
	Mi	28.160/81 **:** 256/243	= 330
	Fa	3.520/9 **:** 9/8 = 28.160/81	= 347,654 320
	Sol	440 **:** 9/8 = 3.520/9	= 391,111 111
	La	440	= 440
	Si	440 x 9/8	= 495
	Do	495 x 256/243 = 14.080/27	= 521,481 480 = 2 x 260,740 740

Escala de Zarlino (també anomenada escala natural o harmònica)

Gioseffo Zarlino (1517-1590) va proposar una nova escala que va servir de referència a tota l'època barroca. La seva novetat és que va introduir la 3ª en el càlcul de tots els intervals, i justament amb un valor de 5/4, que era el donat per 5è harmònic del Do inferior,.

Do = 1	= 1,000 000
Sol = 3/2	= 1,500 000
Re = $(3/2)^2$ = 9/4 = 9/8	Dividint per 2 per abaixar-lo una 8ª queda = 1,125 000
Fa = una 5ª més baixa que el Do = 1/(3/2) = 2/3 = 4/3	Multiplicant per 2 per apujar-lo una 8ª queda = 1,333 333
Fins aquí això és igual que en l'escala pitagòrica, però d'ara en endavant Zarlino fa ús de la relació de 3ª major = 5/4 per calcular les notes que falten	
Mi = 5/4 (per definició) = $5/2^4$	= 1,250 000
La = Fa x 5/4 = (4/3)x(5/4) = 5/3	= 1,666 666
Si = Sol x 5/4 = (3/2)x(5/4) = 15/8 = $(3x5)/2^3$	= 1,875 000

D'aquesta manera els valors de les notes naturals respecte al Do queden així:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/18	2

i les separacions entre notes consecutives resulten ser de:

Do-Re	Re-Mi	Mi-Fa	Fa-Sol	Sol-La	La-Si	Si-Do
9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

Veiem que aquí apareixen 2 tons diferents, un to de 9/8 i un to de 10/9. Això ja és una altra complicació, però ja se sap que quan s'arregla una cosa se n'espatlla una altra. D'aquests tons diferents, hi ha llibres que en diuen to major i to menor, però per evitar confusió amb el tema dels modes majors i menors, que moltes vegades també s'anomenen tons majors i menors, jo prefereixo dir-ne, d'una manera més casolana, to "gran" i to "petit".

Una cosa molt important és que a partir d'aquí ja es començava a construir l'escala cromàtica aplicant els semitons allà on era necessari.

El semitò diatònic és el que hi ha entre el Mi i el Fa i entre el Si i el Do, i ja veiem que val 16/15 = $2^4/3x5$ = 1,066 666.

Aquest semitò substitueix el semitò de l'escala pitagòrica, que valia 256/243 = $2^8/3^5$ = 1,053 498 i que resultava més petit.

Tanmateix, ara apareix un nou semitò, més petit que el semitò diatònic, que és la diferència que hi ha entre el Sol i el Sol #, tenint en compte que el Sol# és la 3ª major del Mi. En efecte:
Sol # = Mi x 5/4 = $(5/4)^2$ = 25/16 = 1,562 500

Relació Sol #/Sol = (25/16)**:**(3/2) = $5^2/2^3x3$ = 25/24 = 1,041 666 (encara menor que el semitò pitagòric)

Aquest Sol # està a 1 semitò diatònic del La. En efecte:
(5/3)**:**(25/16) = (5x16)**:**(3x25) = 16/15

D'aquest semitò de 25/24 se'n diu semitò cromàtic

També resulta que 1 semitò diatònic + 1 semitò cromàtic = 1 to "petit" de 10/9. En efecte:
(16/15)x(25/24) = (2^4x5^2)**:**$(3x5x3x2^3)$ = $(2x5)/3^2$ = 10/9

En canvi, 2 semitons diatònics sumen més que un to de 9/8. En efecte:
$(16/15)x(16/15) = 256/225 = 2^8/(3^2x5^2) = 1{,}137\ 778$, mentre que 9/8 = 1,125 000

Aplicant 3es majors a les notes naturals ja calculades, es pot trobar els valors de les altres notes alterades, que resulten ser aquests:

Do #	Mi b	Fa #	Sol #	Si b
25/24	6/5	45/32	25/16	9/5

Fixem-nos que sempre resulten unes fraccions més senzilles que en el cas de l'escala pitagòrica.

El problema és quan es vol afinar un instrument de sons fixos, ja que totes les notes enharmòniques tenen sons diferents (igual com passava en l'antic sistema pitagòric). En efecte:
La b = Sol + 1 semitò diatònic (per què?) = $(3/2)x(16/15) = 8/5 = 2^3/5 = 1{,}600\ 000$

però ja hem vist que Sol # = $25/16 = 5^2/2^4 = 1{,}526\ 500$

La diferència és de **(8/5):(25/16)** = (8x16)**:**(5x25) = $128/125 = 2^7/5^3 = 1{,}024\ 000$, que ja equival a 41 cents, o sigui gairebé 1/4 de to.

Amb l'escala de Zarlino es pot afinar un instrument de teclat perfectament per a una tonalitat i sona acceptablement bé per a les tonalitats més pròximes, però sona molt malament per a les tonalitats allunyades. Hom va intentar desdoblar les tecles del clavicèmbals, orgues i pianos però els instrumentistes no ho van acceptar perquè era massa complicat.

Tornem a veure tot això mateix però explicat d'una altra manera. El sistema de Zarlino intenta ser més exacte que el pitagòric i per això té un to sencer "gran" de 9/8 i un to sencer "petit" de 10/9. Té un semitò, anomenat diatònic, de 16/15 = 1,066 666, i també s'hi parla d'un altre semitò, anomenat cromàtic, de 25/24 = 1,041666, però que no intervé en l'escala.

En aquesta escala, els intervals de l'8ª són els següents:

Do - Re	Re -Mi	Mi - Fa	Fa -Sol	Sol - La	La - Si	Si - Do
(9/8)	(10/9)	(16/15)	(9/8)	(10/9)	(9/8)	(16/15)

Aquests intervals multiplicats donen:
(9/8)x(10/9)x(16/15)x(9/8)x(10/9)x(9/8)x(16/15) = 2 = l'octava exacta.

Com en el cas anterior, vegen els intervals a partir del Do i també les freqüències de cada nota:

		Intervals	
semitò cromàtic		$25/24 = 5^2/2^3x3$	= 1,041 667
semitò diatònic		$16/15 = 2^4/3x5$	= 1,066 667
to "petit"		$10/9 = 2x5/3^2$	= 1,111 111
to "gran"	Do - Re	$9/8 = 3^2/2^3$	= 1,125 000
3ª major	Do -Mi	$9/8 \ x\ 10/9 = 10/8 = 5/4 = 5/2^2$	= 1,250 000
4ª	Do - Fa	$10/8\ x\ 16/15 = 4/3 = 2^2/3$	= 1,333 333
Tríton = 4ª augmentada = 2 tons grans + 1 to petit	Do - Fa #?	$9/8\ x\ 9/8\ x\ 10/9 = 45/32 = 3^2x5/2^5$	= 1,406 250
5ª	Do - Sol	4/3 x 9/8 = 3/2	= 1,500 000
6ª major	Do - La	3/2 x 10/9 = 5/3	= 1,666 666
7ª major	Do - Si	$5/3\ x\ 9/8 = 15/8 = 3x5/2^3$	= 1,875 000
8ª	Do - Do	$15/8\ x\ 16/15 = 16/8 = 2^4/2^3$	= 2

		Freqüències de l'escala 3	

	Do	297 **:** 9/8	= 264
	Re	330 **:** 10/9	= 297
	Mi	352 **:** 16/15	= **330**
	Fa	396 **:** 9/8	= 352
	Sol	440 **:** 10/9	= 396
	La	440	= **440**
	Si	440 x 9/8	= **495**
	Do	495 x 16/15	= 528 = 2 x 264

(les freqüències que coincideixen amb les de l'escala pitagòrica estan marcades en negreta)

La relació entre el to "gran" i el to "petit" és de:
9/8 **:** 10/9 = 81/80 = 1,012 5000
que equival aproximadament a 1/5 de semitò.
En efecte:
$1,0125^5$ = 1,064 082
i 16/15 = 1,066 666

En aquesta escala, 2 semitons diatònics equivalen a 16/15 x 16/15 = 1,137 777 que és un valor més alt que el to "gran".
En canvi, 1 semitò diatònic + 1 semitò cromàtic equivalen exactament a 1 to "petit": 16/15 x 25/24 = 10/9 = 1,111 111

A més, el Do # ≠ Re b.
En efecte, respecte al Do natural:
Do # = 16/15 = 1,066 666
Re b = 9/8 **:** 16/15 = 135/128 = 1,054 688
o sigui que el Do # és més alt que el Re b.

En l'escala pitagòrica passa al revés: Do # = 256/243 = 1,053 498
Re b = 9/8 **:** 256/243 = 2.187/2.048 = 1,067 871

Vegem què passa amb el Re # i el Mi b:
Re # = 9/8 x 16/15 = 6/5 = 1,200 000
Mi = 9/8 x 10/9 = 10/8 = 1,250 000
Mi b = 10/8 **:** 16/15 = 150/128 = 1,171 875
El Re # és més alt que el Mi b

Essent també la 5ª = 3/2, el problema de la discrepància ente les 12 quintes i 7 octaves segueix essent el mateix que en l'escala pitagòrica.

Vegem la relació entre 6 tons i 1 octava. Això dependrà de si els tons són "grans" o "petits":
6 tons "grans" = $(9/8)^6$ = 2,027 286 > 2, o sigui que són més que 1 octava.
5 tons "grans" i 1 to "petit" = $(9/8)^5$ x (10/9) = 2,002 258, encara > 2.
4 tons "grans" i 2 tons "petits" = $(9/8)^4$ x $(10/9/)^2$ = 1,977 439 < 2.
Ja es veu que combinant tons "grans" i "petits" no donarà mai un 2 exacte.
Només dóna 2, tal com ja hem vist, la combinació de 3 tons "grans", 2 de "petits" i 2 semitons diatònics:
$(9/8)^3$ x $(10/9)^2$ x $(16/15)^2$ = 2

Abaixament del diapasó

Si anem sumant els intervals següents:
Quarta ascendent / Tercera menor descendent / Quarta ascendent / Quinta descendent
= Sol - Do - La - Re - Sol,
hauríem d'anar a parar a la mateixa nota, però comptant-ho bé no es retorna al Sol original. En efecte, tenim:
(4/3)x(5/6)x(4/3)x(2/3) = 80/81 = 1 coma sintònica més avall de la nota de partida.

Això ja ho va notar Rameau. Això vol dir que un instrumentista o un cantor que faci correctament els intervals de l'escala de Zarlino, el to fonamental se li belluga de lloc.

Tot plegat és un desastre dels grossos, aritmèticament parlant.

Els tempraments

Amb els tempraments es tracta de trobar uns sons intermedis entre els # i els b, amb els quals es pugui afinar els instruments de teclat i els de trastes. Això vol dir que es renuncia a tenir una escala teòricament bona però pràcticament intocable.

Durant el barroc es va inventar diferents tempraments, ja que ho n'hi ha cap de totalment satisfactori. Una primera família de tempraments del s. XVII buscava afavorir una tonalitat particular i les modulacions permissibles a partir seu. El temprament més important d'aquesta família és el temprament mesotònic. Una segona família de tempraments, ja en el S. XVIII, ve de la voluntat dels compositors de poder modular a qualsevol tonalitat llunyana sense produir intervals molt falsos, i també que amb un mateix instrument es pogués tocar successivament peces de tonalitats molt diferents o allunyades sense haver d'afinar-los de nou. Això vol dir que aquests instruments sonen quasi correctament en totes les tonalitats però que no sonen perfectament en cap. Una tempraments molt importants d'aquesta família són els de Werckmeister.

Tots aquests tempraments esmentats fins ara encara són tempraments desiguals, on es tracta de repartir "raonablement" la discrepància entre les 5es justes i les 3es majors.

Temprament mesotònic

En l'escala pitagòrica, la 3ª major s'obté per la successió de quatre 5es, p. ex: Do - Sol - Re - La - Mi = una dissetena = $(3/2)^4$ = 81/16. Apujant 2 octaves resulta = 81/64 = $3^4/2^6$ = 1,265 625.

Aquest Si hauria de coincidir amb el 5è harmònic del Do inicial, però la seva diferència és de:
(81/64)**:**(5/4) = (8x4)**:**(64x5) = 81/80, que equival a la coma sintònica que ja hem vist anteriorment.

El sistema mesotònic reparteix aquest error en les 5es, de manera que cada 5ª de 3/2 es disminueix 1/4 de la coma sintònica. Així se sacrifica l'exactitud de les 5es en profit de les 3es. Això formava part del desenvolupament de la tonalitat, on les 3es són molt importants.

Això produïa un altre problema, i és que començant p. ex. per un Mi b + 12 quintes fins a arribar a un Re # (que hauria d'estar un nombre exacte d'octaves per sobre), queda 64,8 cents per sota del Re # pitagòric. El Re # pitagòric està 23,5 cents per sobre de l'octava i el Re # mesotònic està 41 cents per sota, etc.

Això es pot allargar molt i ho deixem estar. Aquest temprament però, va ser molt utilitzat durant tot el S. XVII.

Notem que en aquest temprament, els 2 tons d'una 3ª major eren exactament iguals = $\sqrt{(5/4)}$ = 1,118 034 i, per tant, aquest to mesotònic està situat entremig dels dos tons diferents de l'escala de Zarlino:

To gran = 9/8 = 1,125 000
To petit = 10/9 = 1,111 111

Tempraments de Werckmeister

A finals del S. XVII van aparèixer uns tempraments sobre la base de preferir que totes les tonalitats fossin una mica falses o inexactes, més que no pas que n'hi hagués unes de bones (les pròximes a la tonalitat de partida en l'afinació de l'instrument) i unes altres de desastroses (les més allunyades). Això ho va proposar Andreas Werckmeister, que era un organista. Ja sabem que l'orgue és un instrument molt dificultós d'afinar.

L'any 1691, Werckmeister va proposar 6 tempraments diferents que cada un aporta una solució a un problema diferent. El més conegut de tots és el 3r, que també abaixa les 5es 1/4 de coma sintònica, però no ho fa per a totes les 5es. P. ex. començant per Fa i pujant per 5es successives, tenim:

Fa - Do	5ª de 3/2
Do - Sol	5ª de 3/2 menys 1/4 de coma sintònica = 3/2 menys 5,4 cents
Sol - Re	idem
Re - La	idem
La - Mi	idem

Mi - Si	Altre cop una 5ªde 3/2
Si - Fa #	idem
Fa # - Do #	idem
Do # - Sol #	idem
Sol # - Re #	idem

etc. No podem detallar més per no incórrer en prolixitat.

Degut a la desigualtat del temprament, cada tonalitat tenia un caràcter propi. P. ex. no fóra lògic compondre un Requiem en Do M perquè era una tonalitat que "sonava bé" degut als seus invervals massa consonants, ni un Te Deum en Fa m, que tenia uns intervals més estranys.

P. ex. M. A. Charpentier atribuïa aquest caràcter a cada tonalitat:

	Mode major	Mode menor
Do	Alegre i guerrer	Obscur i trist
Re	Greu i devot	Joiós i molt guerrer
Mi	Efeminat, amorós i planyívol	Barallós i rondinaire
Mi b	Cruel i dur	Horrible i horrorós
Fa	Furiós i barroer	Obscur i planyívol
Sol	Dolçament joiós	Seriós i magnífic
La	Tendre i planyívol	Joiós i camperol
Si b	Magnífic i joiós	Obscur i terrible
Si	Dur i planyívol	Solitari i malenconiós

Escala temprada

La solució a tot aquest desgavell és fer ús de bona matemàtica i dividir l'8ª en 12 semitons exactament iguals, i que 1 to sigui exactament igual a 2 semitons. Aleshores, la 4ª i la 5ª no resulten ser unes relacions tan senzilles i boniques com 4/3 i 3/2, però hi ha molt poca diferència .

1 semitò temprat = $\sqrt[12]{2}$
log 2 = 0,301030
0,301030 **:** 12 = 0,012 085 8
d'on $\sqrt[12]{2}$ = 1,059 463 1

Amb l'escala temprada ja es pot compondre en totes les tonalitats i també es pot modular a una altra tonalitat, per allunyada que estigui de la tonalitat de partida. Això ho va demostrar JS. Bach amb els dos llibres de la seva famosa obra "El clavecí ben temprat", cada un dels quals consta de 24 preludis i fugues en totes les tonalitats majors i menors de l'escala cromàtica. Darrerament D. Xostakòvitx també ha escrit una altra col·lecció de 24 preludis i fugues per a piano, que és una de les obres cabdals del segle XX.

		Intervals	
	Do - Do # (Re b)	1 semitò^{1}	= 1,059 463
	Do - Re	1 semitò^{2}	= 1,122 462
	Do Re # (Mi b)	1 semitò^{3}	= 1,189 207
3ª major	Do -Mi	1 semitò^{4}	= 1,259 920
4ª	Do - Fa	1 semitò^{5}	= 1,334 839
Tríton	Do-Fa # (Sol b)	1 semitò^{6}	= 1,414 214 = $\sqrt{2}$!
5ª	Do - Sol	1 semitò^{7}	= 1,498 308
	Do - Sol # (La b)	1 semitò^{8}	= 1,587 401

6ª major	Do - La	1 semitò^{9}	= 1,681 793
	Do - La # (Si b)	1 semitò^{10}	= 1,781 797
7ª major	Do - Si	1 semitò^{11}	= 1,887 749
8ª	Do - Do	1 semitò^{12}	= 2

	Freqüències de l'escala 3	
Do	440/semitò^{9}	= 261,625 5
Do # (Re b)	440/semitò^{8}	= 277,182 6
Re	440/semitò^{7}	= 293,664 8
Re # (Mi b)	440/semitò^{6}	= 311,127 0
Mi	440/semitò^{5}	= 329,627 5
Fa	440/semitò^{4}	= 349,228 3
Fa # (Sol b)	440/semitò^{3}	= 369,994 5
Sol	440/semitò^{2}	= 391,995 5
Sol # (La b)	440/semitò^{1}	= 415,304 7
La	440	= 440
La # (Si b)	440 x semitò^{1}	= 466,163 8
Si	440 x semitò^{2}	= 493,883 3
Do	440 x semitò^{3}	= 523,251 1= 2 x 261,625 5

Resum comparatiu d'intervals i freqüències

		Intervals		
		E. pitagòrica	E. harmònica	E. temprada
Semitò	Do -Do #	1,053 498	1,066 667	1,059 473
	Do - Re	1,125 000	1,125 000	1,112 462
3ª major	Do -Mi	1,265 625	1,250 000	1,259 920
4ª	Do - Fa	1,333 333	1,333 333	1,334 839
5ª	Do - Sol	1,500 000	1,500 000	1,498 307
6ª major	Do - La	1,687 500	1,666 666	1,681 793
7ª major	Do - Si	1,898 438	1,875 000	1,887 749
8ª	Do - Do	2	2	2

	Freqüències de l'escala 3		
	E. pitagòrica	E. harmònica	E. temprada
Do	260,740 740	264	261,625 5
Re	293,333 333	297	293,664 8
Mi	330	330	329,627 5
Fa	347,654 320	352	349,228 3
Sol	391,111 111	396	391,995 5
La	440	440	440
Si	495	495	493,883 3
Do	521,481 481	528	523,251 1

Intervals petits

Se sol anomenar **coma** els petits intervals < 1/4 de to. Recordem que 1/4 del to de 9/8 és igual a $\sqrt[4]{(9/8)}$ = $\sqrt[4]{1,125}$ = 1,029 884. En descriurem uns quants però no pas necessàriament per ordre de menor a major.

Coma pitagòrica: És igual a la diferència ja esmentada entre 12 quintes de 3/2 i 7 octaves, o bé entre 6 tons de 9/8 i 1 octava. Val 531.441/524.288 = $3^{12}/2^{19}$ = 1,013 643.

Coma sintònica: És igual a la diferència entre el to "gran" i el to "petit". Val 81/80 = $3^4/(2^4x5)$ = 1,0125, de manera que és una mica més petita que l'anterior.

Esquisma: És la diferència entre les 2 comes anteriors, i val aproximadament 1/100 de to. en efecte:
(531.441/524.288) **:** (81/80) = 32.805/32.768 = $(3^8x5)/2^{15}$ = 1,001 129,
mentre que 1/100 de to de 9/8 = 1,001 785.
En realitat l'esquisma és el to de 9/8 dividit en 104,383 98 parts iguals.

També hi ha la **coma de Rameau**, **diasquisma**, o **parve**, que és la diferència entre una quinta disminuïda i una quarta augmentada, però cal esbrinar de quina quinta i de quina quarta es parla. El llibre també diu que "és l'interval que forma amb el precedent una díesi o 1/4 de to".

Una pregunta: Què vol dir exactament amb el precedent? Vol dir amb el so precedent?
Una remarca: Segons el diccionari de l'IEC, díesi no significa 1/4 de to sinó que aquest terme és sinònim de #.

El llibre diu que és = 2.048/2.025 = $2^{11}/(3^4x2^5)$ = 1,011 852. Això no és 1/4 de to perquè $1,011\ 852^4$ = 1,048 257 $\neq$ 1 to.

Quan el llibre diu que és igual a la diferència entre la 5ª disminuïda i la 4ª augmentada n'especifica els valors respectius de 64/45 = $2^6/(3^3x5)$ = 1,422 222, i de 45/32 = $(3^2x5)/2^5$ = 1,406 25.

Això en el sistema pitagòric no és veritat, ja que la 5ª disminuïda d'un semitò val:
3/2 **:** 256/243 = 729/512 = $3^6/2^9$ = 1,423 828
i la 4ª augmentada d'un semitò val: 4/3 x 256/243 = 1.024/729 = $2^{10}/3^6$ = 1,404 664,
valors diferents dels indicats al llibre, però, a més a més, la seva diferència val:
729/512 **:** 1.024/729 = 531.441/524.288 = $3^{12}/2^{19}$ = 1,013 543,
que resulta que és igual a la coma pitagòrica i no pas a aquesta coma de Rameau, diasquisma o parve, tal com l'han definida.

Ara bé, buscant en el sistema harmònic o natural, trobem que la 5ª disminuïda de valor 64/45 resulta de restar 2 tons grans i 1 to petit a una 8ª de 3 tons grans, 2 tons petits i 2 semitons diatònics = per tant, a 1 to gran, 1 to petit i 2 semitons diatònics.
En efecte: 9/8 x 10/9 x 16/15 x 16/15 = 64/45.
També trobem que la 4ª augmentada de 45/32 resulta que és igual a 2 tons grans i 1 to petit.
En efecte: 9/8 x 9/8 x 10/9 = 45/32.

Amb aquestes definicions de la 5ª disminuïda i la 4ª augmentada, sí que la coma de Rameau, diasquisma o parve val el valor indicat de 2.048/2.025.

Intervals majors d'1/4 de to

Limma pitagòrica = semitò pitagòric = $2^8/3^5$ = 256/243 = 1,053 498.

Apòtome = diferència entre 7 quintes de 3/2 i 4 octaves = $(3/2)^7$ **:** 2^4 = $3^7/2^{11}$ = 2.187/2.048 = 1,067 841.
És > que el semitò cromàtic de 25/24 = $5^2/(2^3x3)$ = 1,041 666.
i també és > que el semitò diatònic de 16/15 = $2^4/(3x5)$ = 1,066 666.

La diferència entre l'apòtome i la limma o semitò pitagòric és de:
2.187/2.048 **:** 256/243 = $3^{12}/2^{19}$ = 531.441/524.288 = 1,013 643 = a la coma pitagòrica!

Un llibre diu que l'escala engendrada pel sistema pitagòric s'anomena escala dels violinistes, perquè solen tocar la 3ª massa gran (atracció vers la 4ª), i que també tenen tendència a tocar massa altes les notes # i a tocar massa baixes les notes b.

Diferència entre el semitò diatònic i el semitò cromàtic

16/15 **:** 25/24 = $2^7/5^3$ = 128/125 = 1,02 4.

Un llibre anomena díesi a aquesta diferència, però això no és correcte, perquè el diccionari IEC defineix la díesi com a terme sinònim de #. El llibre també diu que aquest valor s'aproxima a 1/4 de to, però en realitat és bastant menys, ja que: $1{,}024^4$ = 1,099512, mentre que 9/8 = 1,125 i 10/9 = 1,111 111.
En tot cas, seria 1 to de 9/8 dividit per 4,966, o sigui que aquest interval s'assembla més a 1/5 de to que no pas a 1/4.
En efecte: $1{,}025^5$ = 1,125 9.

Taula d'intervals, ordenats de menor a major (només amb 6 decimals).

1,001 129	**Esquisma** (Z) = $(3^8$x$5)/2^{15}$ = 32.805/32.768 = diferència entre la coma pitagòrica i la coma sintònica.
1,011 852	**Coma de Rameau, diasquisma o parve** (Z) = $2^{11}/(3^4$x$2^5)$ = 2.048/2.025 = diferència entre una 5ª disminuïda (de valor 64/45, o sigui formada per 1 octava menys 2 tons grans i menys 1 to petit) i una 4ª augmentada (de valor 45/32, o sigui formada per 2 tons grans més 1 to petit).
1,012 500	**Coma sintònica** (Z) = $3^4/(2^4$x5) = 81/80 = diferència entre 1 to gran i 1 to petit.
1,013 643	**Coma pitagòrica** (P) = $3^{12}/2^{19}$ = 531.441/524.288 = diferència entre 12 quintes de 3/2 i 7 octaves = diferència entre 6 tons de 9/8 i 1 octava = diferència entre la limma o semitò pitagòric i l'apòtome.
1,024 000	**Díesi o quart de to** (P - compte, que ni és díesi ni és quart de to) = $2^7/5^3$ = 128/125 = diferència entre el semitò diatònic i el semitò cromàtic.
1,041 667	**Semitò cromàtic** (Z) = $5^2/(2^3$x3) = 25/24. Ja n'hem parlat en l'apartat del sistema harmònic o natural.
1,053 498	**Limma pitagòrica** o **semitò pitagòric** (P) = $2^8/3^5$ = 256/243 = semitò que resulta del sistema pitagòric = a la diferència entre una 4ª de 4/3 i dos tons de 9/8.
1,059 463	**Semitò temprat** (t) = $\sqrt[12]{2}$ = semitò del sistema temprat, que resulta de dividir l'octava en 12 intervals (semitons) exactament iguals.
1,066 667	**Semitò diatònic** (Z - segona menor en el sistema harmònic o natural) = $(2^4/3$x5) = 16/15 = semitò que es fa servir en el sistema harmònic o natural.
1,067 841	**Apòtome** (P) = $3^7/2^{11}$ = 2.187/2.048 = diferència ente 7 quintes de 3/2 i 4 octaves.
1,111 111	**To petit** (Z) = (2x5)/3^2 = 10/9 = emprat en el sistema harmònic o natural.
1,122 462	**To temprat** (t) = $(\sqrt[12]{2})^2$ = $\sqrt[6]{2}$ = suma exacta de 2 semitons temprats = resulta de dividir l'octava en 6 tons exactament iguals a 1/6 d'octava.
1,125 000	**To gran** (Z -P - segona major en el sistema pitagòric i en el sistema harmònic o natural) = $3^2/2^3$ = 9/8 = emprat en el sistema pitagòric i també en el sistema harmònic o natural. També és = a la diferència entre 2 quintes de 3/2 i 1 octava. En efecte: $(3/2)^2/2$ = 9/8 = 1,125.
1,152 000	**Tercera disminuïda** (Z - sense cap més referència) = Interval de 144/125 = $(2^4$x$3^2)/5^3$. Després de molt buscar i no trobar res, aquest interval de 144/125 resulta de sumar un to de 9/8 i la diferència entre el semitò diatònic i el semitò cromàtic, que és de 128/125. Si hi ha una altra relació més senzilla, el llibre no ho especifica i no l'he sabuda trobar. En efecte: 9/8 x 128/125 = $(2^4$x$3^2)/5^3$ = 144/125 = 1,152. No sé quina lògica pot tenir aquest interval.
1,171 875	**Segona augmentada** (Z - sense cap més referència) = Interval de 75/64 = (3x$5^2)/2^6$ =. Resulta que és igual a 1 to gran + 1 to petit, menys 1 semitò diatònic. En efecte: 9/8 x 10/9 **:** 16/15 = (3x$5^2)/2^6$ = 75/64 = 1,171875. També és molt estrany anomenar 2ª augmentada a 2 tons diferents menys 1 semitò.
1,185 185	**Tercera menor pitagòrica** (P) = 32/27 = $2^5/3^3$. Aritmèticament resulta que aquest interval és igual a la diferència entre 2 octaves i 3 quintes. No entenc per què en diuen 3ª menor. En

	efecte: 2^2 **:** $(3/2)^3 = (2^2x3^2)/3^3 = 2^5/3^3$ = 1,171875.
1,189 207	**Tercera menor temprada** (t) = $(^{12}\sqrt{2})^3 = {}^4\sqrt{2}$ = 1 to i 1 semitò temprats = 3 semitons temprats = 1/4 d'octava.
1,200 000	**Tercera menor** (Z) = 6/5 = (2x3)/5 = 1 to gran més 1 semitò diatònic. En efecte: 9/8 x 16/15 = $(3^2/2^3)x(2^4/3x5)$ = (2x3)/5 = 6/5 = 1,20.
1,250 000	**Tercera major** (Z) = 5/4 = 1 to gran + 1 to petit. En efecte: 9/8 x 10/9 = 10/8 = 5/4 = 1,25. També correspon a l'**harmònic 5** = a la freqüència del to original x 5 i menys 2 octaves.
1,259 920	**Tercera major temprada** (t) = $(^{12}\sqrt{2})^4 = {}^3\sqrt{2}$ = 2 tons temprats = 1/3 d'octava.
1,265 625	**Tercera major pitagòrica** (P) = 81/64 = $3^4/2^6$ = 2 tons de 9/8. També és igual a la diferència entre 4 quintes de 3/2 i 2 octaves. En efecte: $(3/2)^4$ **:** $2^2 = 3^4/2^6$ = 1,265625.
1,280 000	**Quarta disminuïda** (Z) = 32/25 = $2^5/5^2$. Aritmèticament es veu que resulta de sumar 1 3ª disminuïda de 144/125 i 1 to de 10/9. En efecte: (10/9) **:** (144/125) = $(2x5)/3^2$ **:** $(2^4x3^2)/5^3 = 2^5/5^2$ = 1,28.
1,302 083	**Tercera augmentada** (Z) = 125/96 = $5^3/(2^5x3)$ ...
1,333 333	**Quarta justa** (Z-P) = 4/3 = $2^2/3$. Ja l'hem vista moltes vegades. També és igual a la diferència entre una 8ª i una 5ª de 3/2. En efecte: 2 **:** (3/2) = 4/3 = 1,333333.
1,334 839	**Quarta temprada** (t) = $(^{12}\sqrt{2})^5$ = 2 tons i 1 semitò temprats.
1,350 000	**Quarta forta** (Z) = 27/20 = $3^3/(2^2x5)$ ...
1,375 000	**Harmònic 11** = 11/8. Correspon a la freqüència del to original x 11 i menys 3 octaves.
1,406 250	**Quarta augmentada** (Z) = 45/32 = $(3^2x5)/2^5$ ...
1,414 214	**Tríton** (t) = $(^{12}\sqrt{2})^6 = \sqrt{2}$ = 3 tons temprats = 1/2 octava.
1,422 222	**Quinta disminuïda** (Z) = 64/45 = $2^6/(3^3x5)$ ...
1,423 828	**Quinta augmentada** (P) = 729/512) = $3^{6*}/2^9$ ...
1,481 481	**Quinta feble** (Z) = 40/27 = $(2^3x5)/3^3$ ...
1,498 308	**Quinta temprada** (t) = $(^{12}\sqrt{2})^7$ = 3 tons i 1 semitò temprats.
1,500 000	**Quinta justa** (Z-P) = 3/2. Ja n'hem parlat moltes vegades i és una de les bases dels sistemes pitagòric i harmònic o natural.
1,536 000	**Sexta disminuïda** (Z) = 192/125 = $(2^6x3)/5^3$ ...
1,562 500	**Quinta augmentada** (Z) = 25/16 = $5^2/2^4$ ...
1,580 247	**Sexta menor** (P) = 128/81 = $2^7/3^4$ ...
1,587 401	**Sexta menor** (t) = $(^{12}\sqrt{2})^8 = (^3\sqrt{2})^2$ = 4 tons temprats = 2/3 d'octava.
1,600 000	**Sexta menor** (Z) = 8/5 = $2^3/5$ ...
1,625 000	**Harmònic 13** = 13/8 = $13/2^3$. Correspon a la freqüència del to original x 13 i menys 3 octaves.
1,666 667	**Sexta major** (Z) = 5/3 ...
1,681 793	**Sexta major** (t) = $(^{12}\sqrt{2})^9 = (^4\sqrt{2})^3$ = 4 tons i 1 semitò temprat = 3/4 d'octava.
1,687 500	**Sexta major** (P) = 27/16 = $3^3/2^4$ ...
1,750 000	**Sèptima disminuïda** (Z) = 7/4. També correspon a l'harmònic 7 = a la freqüència del to original x 7 i menys 2 octaves
1,757 813	**Sexta augmentada** (Z) = 225/128 = $(3^2x5^2)/2^7$ ...
1,777 778	**Sèptima menor** (P) = 16/9 = $2^4/3^2$ ...

1,781 797	**Sèptima menor** (t) = $(\sqrt[12]{2})^{10}$ = $(\sqrt[6]{2})^{5}$ = 5 tons temprats = 5/6 d'octava.
1,800 000	**Sèptima menor** (Z) = 9/5 = $3^2/5$ ...
1,875 000	**Sèptima major** (Z) = 15/8 = $3x5/2^3$ ...
1,887 749	**Sèptima major** (t) = $(\sqrt[12]{2})^{11}$ = 5 tons i 1 semitò temprats.
1,898 438	**Sèptima major** (P) 243/128 = $3^5/2^7$ ...
1,920 000	**Octava disminuïda** (Z) = 48/25 = $(2^4x3)/5^2$ ...
1,953 125	**Sèptima augmentada** (Z) = 125/64 = $5^3/2^6$ ...
2,000 000	**Octava** (Z-P-t)

Observem que els harmònics 3 i 5 corresponen respectivament a 3/3 = 1,500 000 = Quinta justa (Z-P) i a 5/4 = 1,250 000 = Tercera major (Z).

BIBLIOGRAFIA

Joaquín Zamacois. Teoría de la música. Ed. Labor. Barcelona. 1967
Roland de Candé. Diccionari de la música. Ed. 62. Barcelona. 1967
Ulrich Michels. Atlas de música. Alianza Editorial. Madrid 1982
John R. Pierce. Los sonidos de la música. Biblioteca Scientific American. Ed. Labor. Barcelona 1985
J. Javier Goldáraz. Afinación y temperamento en la música occidental. Alianza Editorial . Madrid 1992
Alain Daniélou. Traité de musicologie comparée. Hermann Editeurs. París 1993
Laurent Fichet. Le langage musical baroque. Ed. Zurfluh. Bourg-la-Reine. 2000
http/:www.virga/org.zarlino