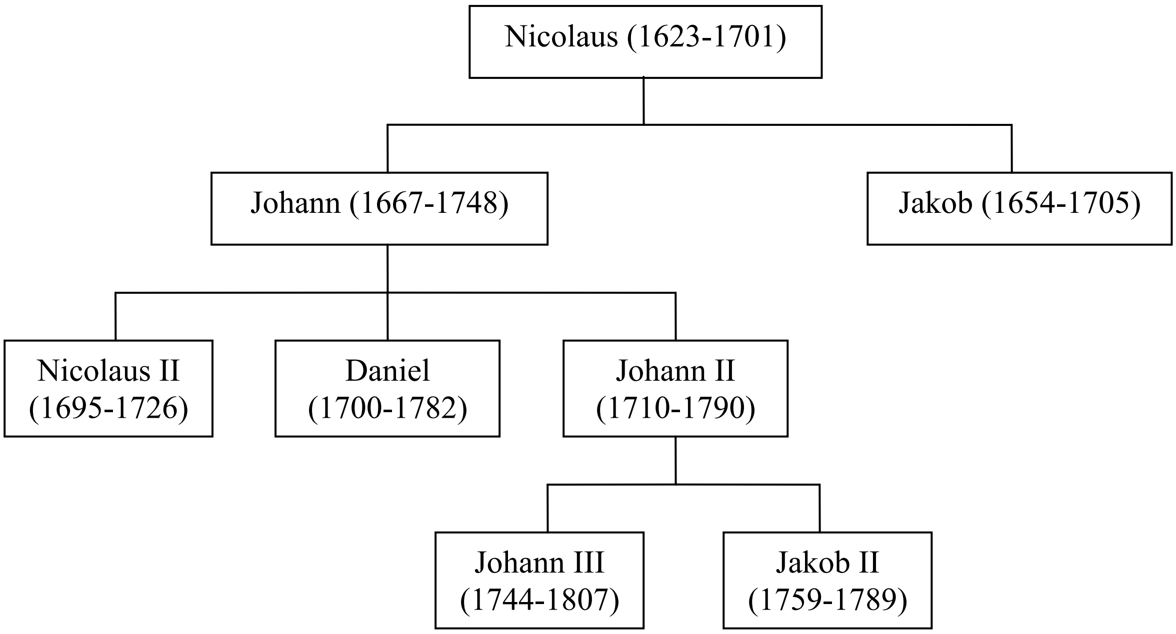
L'EQUACIÓ DE BERNOULLI

La família Bernoulli



Els Bernoulli eren una família d'origen holandès que van marxar a Suïssa a causa de la persecució del duc d'Alba contra els protestants. Nicolaus va arrelar completament a Basilea, on ja van néixer els seus fills Jakob i Johann i on va ser Conseller de l'Ajuntament i Magistrat. Incidentalment Johann va anar a Holanda a exercir de professor i per això Daniel va néixer a Groningen, però després de diverses vicissituds va tornar a Suïssa fins que hi va morir. Tret del primer Nicolaus, que era un comerciant d'espècies, tots els altres Bernoullis d'aquest quadre van ser científics, bàsicament matemàtics, però també físics, astrònoms i alguns també van ser metges.

Fem primerament un petit repàs biogràfic d'aquesta família, a partir de la primera generació de científics. Els més notables van ser Jakob, Johann i Daniel, i aquest darrer és el que va formular l'expressió algebraica coneguda com a Teorema de Bernoulli, tot i que potser seria millor anomenar-la Equació de Bernoulli.

Jakob Bernoulli va ser un dels primers que es van adonar de les enormes possibilitats del càlcul infinitesimal que havien acabat de descobrir Leibnitz i Newton, i va ser el primer que va emprar el terme "integral". Va estudiar les propietats de moltes corbes com la isòcrona (*), la braquistòcrona (**), les corbes càustiques (***), la catenària, l'espiral logarítmica i la que duu el seu nom, la lemniscata de Bernoulli, d'equació en coordenades polars $r^2 = a.\cos 2\theta$. Va aprofundir en la teoria de les sèries i el 1713 va publicar l'obra *Ars Conjectandi*, amb els principis fonamentals del càlcul de probabilitats, incloent-hi la llei dels grans nombres. Va ser professor de matemàtiques a la universitat de Basilea des de 1687, a l'edat de 33 anys) fins a la seva mort el 1705. Va fer gravar una espiral logarítmica a la seva tomba amb la llegenda en llatí *Eadem mutata resurgo*, o sigui "ressorgeixo idèntica quan em canvien".

(*) Isócrona és la corba segons la qual un cos que cau per la força de la gravetat tarda el mateix temps per arribar al final, independentment del punt de sortida.

(**) Braquistòcrona és la corba segons la qual un cos que cau per la força de la gravetat tarda el mínim temps entre dos punts.

(***) Càustiques són les corbes envolupants dels raigs de llum reflectits per una corba donada a partir dels raigs de llum que surten d'un mateix punt.

Johann Bernoulli era 12 anys més jove que el seu germà Jakob. Els seus pares volien que es dediqués als negocis però ell hi va oposar resistència fins que al final el van deixar anar a la universitat a estudiar medicina, però a més a més també hi va estudiar matemàtiques amb el seu germà. Més endavant va visitar Ginebra i París, on va conèixer els matemàtics francesos més destacats i fins i tot va donar lliçons a l'Hôpital, el qual després va publicar un llibre de càlcul basat en els seus apunts. Va treballar en els mateixos temes que el seu germà, primer en col·laboració, després amb rivalitat i finalment amb oberta hostilitat. El 1695 va ocupar una càtedra de matemàtiques a Groningen on va estar 10 anys, i quan va tornar a Basilea el seu germà Jakob havia mort, de manera que va ocupar la seva càtedra de matemàtiques durant els 43 anys que li van restar de vida.

Va estar al costat de Leibnitz en la seva disputa amb Newton però va acabar barallat amb el seu fill Daniel i el va fer fora de casa perquè havia guanyat *ex aequo* amb ell un premi de l'Acadèmia de París. El seu mal caràcter li va fer publicar un llibre amb el títol *Hydraulique* que era copiat de la *Hydrodinamique* de Daniel, al qual fins i tot va posar una data anterior per fer veure que l'obra era original seva. Va assolir una gran fama en el seu temps i va ser membre de les Acadèmies de París, Berlín, Londres, Sant Petersburg i Bolonya. Era conegut com l'Arquímedes de la seva època.

Daniel Bernoulli era el segon fill de Johann i va néixer a Groningen, on el seu pare ocupava una càtedra de matemàtiques. El seu pare també volia que fos comerciant i ell hi va oposar una resistència semblant a la del seu pare amb el seu avi. Finalment també va accedir a estudiar medicina i també es va posar a estudiar paral·lelament física i matemàtiques. El seu pare li havia ensenyat les seves teories sobre l'energia cinètica i la conservació de l'energia i ell va aplicar aquests coneixements a la medicina, en particular a l'estudi de la circulació de la sang.

Va viatjar a Venècia i als 24 anys va publicar el llibre *Exercitationes* sobre diversos temes matemàtics que li va donar fama a tot Europa. Va acceptar una càtedra de matemàtiques a Sant Petersburg on va anar amb el seu germà gran Nicolaus que hi va morir un any més tard. Aleshores el seu pare li va enviar el seu millor deixeble, Leonard Euler, amb qui va fer molta amistat i tots dos van estudiar la mecànica dels cossos flexibles i elàstics. Va estudiar els moviments de vibració de les cordes dels instruments musicals i un tema ben diferent com el llibre *Explicació d'una nova teoria del mesurament del risc* (1738) on aplicava la teoria de les probabilitats a l'economia política.

La seva obra més important és la ja esmentada *Hydrodinamique*, basada en el principi de la conservació de l'energia. Va posar la base per a la teoria cinètica dels gasos i ja es va aproximar a la formulació de les lleis de Boyle-Mariotte i a l'equació de van der Waals

$$(p + a/V^2)*(V-b) = RT$$

Va deixar Sant Petersburg el 1733 i de retorn a Basilea va visitar Danzig, Hamburg, Holanda i París. A Basilea va ocupar càtedres de medecina, metafísica i finalment la de física el 1750, que va ocupar fins a 1776. Va arribar a conjecturar la llei de l'electrostàtica de Coulomb i va guanyar 10 vegades el premi de l'Acadèmia de París amb temes d'astronomia, nàutica, marees, magnetisme, determinació de l'hora en el mar, corrents oceànics, forces exercides sobre els vaixells, etc. També va ser membre de les Acadèmies de Bolonya, Sant Petersburg, París, Londres, Berna, Torí, Zurich i Mannheim.

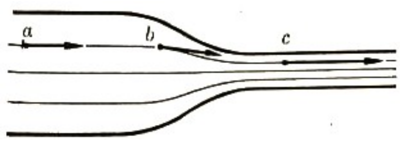
Els altres Bernoullis. Johann II, germà petit de Nicolaus II i de Daniel també va ser professor a Basilea i dels seus fills, Johann III va ser astrònom i matemàtic a Berlín i Jakob II va ser professor a Basilea, Verona i Sant Petersburg.

La Hydrodinamique

Aquesta va ser la principal obra de Daniel Bernoulli, publicada el 1738, i basada totalment en el principi de la conservació de l'energia que li havia ensenyat el seu pare. Avui dia la hidrodinàmica és la part de la física que estudia el moviment dels fluids i és una part molt complicada de la mecànica. Encara que per a cada partícula es compleix l'equació F = m*a, el que cal és trobar unes equacions que ens descriguin el comportament global del fluid sense haver de particularitzar l'estudi per a cada una de les partícules que el componen.

Règim estacionari

Tant l'equació de continuïtat com el teorema o equació de Bernoulli s'apliquen a fluids no viscosos i incompressibles que circulen per un conducte tancat i en règim estacionari.



Règim estacionari vol dir que cada partícula que passa per un punt, p. ex. el punt a, segueix exactament la mateixa trajectòria que les partícules precedents que van passar per aquell punt. Aquestes trajectòries s'anomenen línies de flux o línies de corrent. Si la secció transversal del conducte varia d'un punt a un altre, la velocitat d'una partícula variarà al llarg de la seva línia de corrent, però en cada punt la velocitat de les diferents partícules que hi passen successivament sempre és la mateixa.

Cal dir però que en un fluid real, a causa de la seva viscositat, en una secció qualsevol del conducte la velocitat serà major al centre que a prop de les parets, però en un fluid ideal sense viscositat, en tots els punts d'una mateixa secció la seva velocitat és la mateixa.

El moviment d'un fluid és estacionari quan la seva velocitat no és elevada i en el tub no hi ha obstacles, canvis sobtats de secció o corbes de radi molt petit que obliguin les línies de corrent a canviar bruscament de direcció i a produir remolins. En tal cas, el moviment del fluid és de tipus turbulent.

Equació de continuïtat

Considerem un fluid que es mou d'esquerra a dreta i que en el punt (1) de la figura, d'àrea A_1, circula a la velocitat v_1, i en el punt (2), d'àrea A_2, circula a la velocitat v_2.

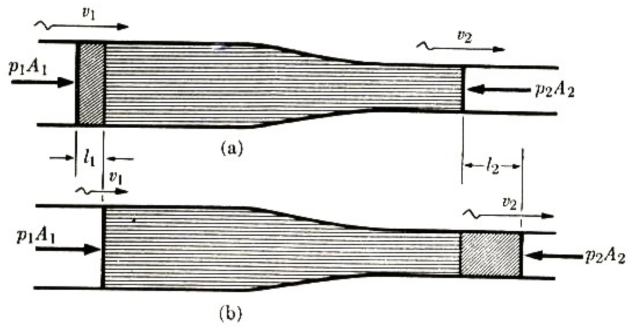
En un temps t el fluid que estava en el punt (1) ha recorregut un espai v_1*t i el volum que ha passat per aquest punt és A_1*v_1*t. En el mateix temps el fluid que estava en el punt (2) ha recorregut un espai v_2*t i el volum que ha passat per aquest punt és A_2*v_2*t.

En un temps unitat aquests volums seran respectivament A_1*v_1 i A_2*v_2. Si el fluid és incompressible aquests dos volums han de ser iguals, d'on resulta l'anomenada equació de continuïtat $A_1*v_1 = A_2*v_2 = A*v$ = constant en qualsevol punt del conducte.

Aquesta relació mostra que qual l'àrea o secció del conducte augmenta, la velocitat del fluid disminueix en la mateixa proporció i inversament.

Equació de Bernoulli

L'equació de Bernoulli és l'equació fonamental de la hidrodinàmica i relaciona la pressió, la velocitat i l'altura en els punts d'un conducte recorregut en règim estacionari per un fluid incompressible i sense viscositat. Per deduir aquesta equació a partir del principi de conservació de l'energia primerament calcularem el treball (energia) exterior que s'ha de realitzar (aportar) per dur el fluid que circula pel conducte de la situació (a) de la figura a la situació (b), i després igualarem aquesta energia a la variació d'energia cinètica més la variació d'energia potencial d'aquesta mateixa massa de fluid.



La porció de fluid que apareix ratllada en horitzontal és la mateixa en la situació (a) que en la (b), i per tant és suficient fer el càlcul per a les dues porcions ratllades inclinadament que, essent el fluid incompressible, tenen el mateix volum $A_1*l_1 = A_2*l_2$ i la mateixa massa m, igual al volum anterior per la densitat del fluid ρ.

La força que actua sobre la massa de fluid que es desplaça és p_1*A_1 per la banda esquerra i p_2*A_2 per la banda dreta. El treball exterior aportat és:

$p_1*A_1*l_1 - p_2*A_2*l_2$

però tal com s'ha dit abans $A_1*l_1 = A_2*l_2$ són els volums de massa m que comparem, volums també iguals a m/ρ, de manera que tenim:

Treball exterior = $p_1*A_1*l_1 - p_2*A_2*l_2 = p_1*m/\rho - p_2*m/\rho = (p_1 - p_2)*m/\rho$

La variació d'energia cinètica de la porció de fluid de massa m és:

$½*m*v_2^2 - ½*m*v_1^2$

La variació d'energia potencial de la mateixa porció de fluid respecte a un nivell de referència quasevol és:

$m*g*y_2 - m*g*y_1$

Igualant el treball exterior aportat a la variació d'energia cinètica més la variació d'energia potencial tenim:

$(p_1 - p_2)*m/\rho = (½*m*v_2^2 - ½*m*v_1^2) + (m*g*y_2 - m*g*y_1)$

Posant a l'esquerra els termes amb subíndex 1 i a la dreta els termes amb subíndex 2 tenim:

$p_1*m/\rho + ½*m*v_1^2 + m*g*y_1 = p_2*m/\rho + ½*m*v_2^2 + m*g*y_2$

Podem eliminar m i resulta:

$p_1/\rho + ½*v_1^2 + g*y_1 = p_2/\rho + ½*v_2^2 + g*y_2$

També podem dividir els dos membres de l'equació per g i resulta:

$p_1/\rho*g + v_1^2/2g + y_1 = p_2/\rho*g + v_2^2/2g + y_2$

Com que tant (1) com (2) són dos punts qualssevol del conducte, podem dir que en general, es compleix per a qualsevol punt que la suma

$p/\rho*g + v^2/2g + y = constant$ (p és la pressió absoluta del fluid i no la relativa)

Els tres termes d'aquesta equació equivalen dimensionalment a longituds i per això se solen denominar:

$p/\rho*g$	altura deguda a la pressió	$[(kg*m/s^2)/m^2]/[(kg/m^3)*(m/s^2)] = m$
$v^2/2g$	altura deguda a la velocitat	$(m/s)^2/(m/s^2) = m$
y	altura de cota = m	

Aquesta equació també es pot expressar d'una altra forma. Si multipliquem els dos termes per $\rho*g$ tenim:

$p_1 + ½*\rho*v_1^2 + \rho*g*y_1 = p_2 + ½*\rho*v_2^2 + \rho*g*y_2$

i genèricament:

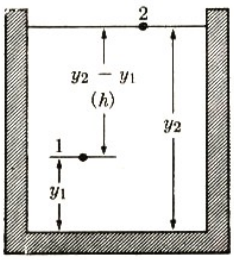
$p + ½*\rho*v^2 + \rho*g*y = constant$

Els termes de l'equació posada en aquesta forma equivalen a pressions i potser això intuïtivament es veu més clar el seu significat.

p	és anomenada pressió estàtica a l'interior del fluid.
$½*\rho*v^2$	és anomenada pressió dinàmica, ja que el seu valor depèn de la velocitat.
$\rho*g*y$	és la pressió deguda a la cota del fluid respecte al nivell de referència.

Aplicacions de l'equació de Bernoulli

a/ Pressió hidrostàtica:



Suposem un punt (1) a l'interior d'un líquid i el punt (2) a la seva superfície. Estant el dipòsit tancat la velocitat del líquid és nul·la en tots els seus punts, de manera que tenim:

$v_1 = v_2 = 0$ i també,

p_2 = pressió atmosfèrica = p_a

Mesurant les altures des del fons del dipòsit i aplicant l'equació de Bernoulli als dos punts tenim:

$p_1/\rho*g + y_1 = p_a/\rho*g + y_2$ d'on resulta:

$p_1 = p_a + \rho*g*(y_2 - y_1) = p_a + \rho*g*h$

essent $h = (y_2 - y_1)$ la profunditat del punt (1)

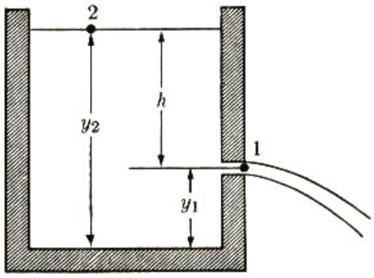
Si s'omet el terme p_a tindrem la pressió mesurada per damunt de la pressió atmosfèrica, també anomenada pressió relativa.

P. ex. per a l'aigua $\rho = 1.000\ kg/m^3$ $g = 9{,}81\ m/s^2$ i $p_a = 101.300\ Pa$

de manera que a una profunditat de 50 m, la pressió serà de:

p = 101.300 + 1.000*9,81*50 = 101.300 + 490.500 = 591.800 Pa de pressió absoluta, o bé 490.500 Pa de pressió relativa.

b/ Teorema de Torricelli:



Ens dóna la velocitat de sortida d'un líquid pel forat d'un dipòsit. També prenem el punt (1) en el forat de sortida i el punt (2) a la superfície del dipòsit. Aleshores tenim:

$p_1 = p_2 = p_a$

O sigui igual a la pressió atmosfèrica, ja que tots dos punts estan en comunicació amb l'atmosfera.

A més a més, si el dipòsit és gran en relació amb el diàmetre del forat, també podem suposar que $v_2 = 0$

Aplicant l'equació de Bernoulli als dos punts tenim:

$p_a/\rho*g + v_1^2/2g + y_1 = p_a/\rho*g + 0 + y_2$ i podem eliminar els primers sumands de cada terme, d'on resulta:

$v_1^2/2g = y_2 - y_1 = h$

$v_1^2 = 2g*h$

$v_1 = (2g*h)^{1/2}$ (arrel quadrada)

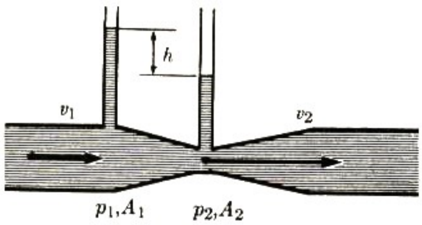
O sigui que la velocitat de sortida del líquid pel forat és la mateixa que assoliria un cos que caigués lliurement des de la mateixa altura h.

c/ Sortida de l'aigua d'una mànega:

Les mànegues contra incendis, o simplement per regar l'herba d'un jardí, se solen acabar amb una llança de secció cónica de diàmetre decreixent. Això es fa perquè, tal com explica l'equació de continuïtat, la velocitat de l'aigua augmenti i així el raig arribi més lluny.

Ara bé, l'equació de Bernoulli ens mostra que en aquest cas la pressió disminueix, de manera que en sortir el raig fora de la llança, en el tram immediat i mentre encara es conserva el règim estacionari del corrent, la pressió atmosfèrica que actua tot al voltant del raig supera aquesta pressió de l'interior del fluid i el fa estrènyer.

d/ Efecte Venturi:



Aquest efecte es dóna en un escanyament d'un tub, fet de manera gradual per evitar remolins, ja que en aquest cas l'equació de Bernoulli no hi seria aplicable.

Posant el tub en posició horitzontal tenim $y_1 = y_2$ i es poden eliminar. Aleshores resulta:

$p_1/\rho*g + v_1^2/2g = p_2/\rho*g + v_2^2/2g$ i podem eliminar g. També multiplicant els dos termes de la igualtat per ρ tenim:

$p_1 + ½*\rho*v_1^2 = p_2 + ½*\rho*v_2^2$

Com que per l'equació de continuïtat $v_2 > v_1$ necessàriament resulta que $p_2 < p_1$, o sigui que quan en un conducte la velocitat augmenta la pressió disminueix i viceversa.

En el cas d'una velocitat v_2 molt elevada això pot arribar a produir una succió en el punt (2) si p_2 arriba a ser inferior a la pressió atmosfèrica, propietat de què es fa ús en múltiples aplicacions, p. ex:

- En els carburadors dels cotxes.
- En les trompes de buit dels laboratoris.
- En els antics aparells de polvoritzar líquid insecticida.

També veiem com les cortines de la dutxa s'acosten al raig de l'aigua, com els ciclistes són atrets pels camions o els autocars que els avencen i com una pilota de ping-pong s'aguanta voltant sobre el raig d'un sortidor (ou com balla).

Coneixent el diàmetre dels dos trams del conducte, la densitat del fluid i la diferència de pressió a partir de l'altura h podem deduir la velocitat del corrent abans de l'escanyament i en l'escanyament mateix. Partint de la mateixa expressió anterior:

$p_1 + ½*\rho*v_1^2 = p_2 + ½*\rho*v_2^2$ tenim:

$p_1 - p_2 = ½*\rho*(v_2^2 - v_1^2)$ i per l'equació de continuïtat $v_1 = v_2*A_2/A_1$

i substituint resulta:

$p_1 - p_2 = ½*\rho*(v_2^2 - v_2*A_2^2/A_1^2) = ½*\rho*v_2^2*(1 - A_2^2/A_1^2)$

d'on, aclarint v_2 resulta:

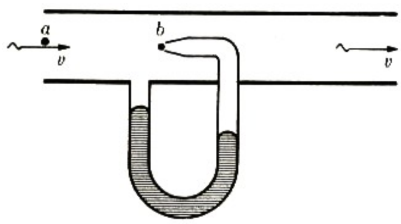
$v_2 = A_1[2(p_1 - p_2)/\rho*(A_1^2 - A_2^2)]^{1/2}$ (arrel quadrada)

P. exemple: $r_1 = 20$ cm = 0,2 m
$r_2 = 5$ cm = 0,05 m
h = 13 cm = 0,13 m
Si el fluid és aigua, $\rho = 1.000$ kg/m^3

L'altura h equival a una diferència de pressió $p_1 - p_2 = \rho*g*h = 1.000*9,81*0,13 = 1.275$ Pa.

Aplicant la fórmula anterior resulta $v_2 = 1,6$ m/s i $v_1 = v_2*A_2/A_1 = 0,1$ m/s

e/ Tub de Pitot:



Serveix per mesurar la velocitat d'un fluid en un conducte, o fins i tot la velocitat del vent. Això es fa amb un aparell com el de la figura. La pressió del tub esquerre és la mateixa del fluid i la pressió del punt (b) es calcula per l'equació de Bernoulli però tenint en compte que en aquest punt la velocitat és nul·la.

Amb el tub en situació horitzontal també tenim que $y_1 = y_2$ i es poden eliminar.

$p_a/\rho*g + v_a^2/2g = p_b/\rho*g$ multiplicant els dos termes per $\rho*g$ resulta:

$p_a + ½*\rho*v_a^2 = p_b$

Com que $p_b > p_a$ el mercuri del tub de Pitot o manòmetre tindrà un nivell més baix, tal com es veu en la figura.

La diferència de nivell entre les dues branques del manòmetre, plenes amb mercuri o un líquid qualsevol de densitat ρ_0 (mentre no sigui miscible amb el del conducte del fluid que estem mesurant), ens permet relacionar p_b i p_a.

$p_b = p_a + \rho_0*g*h$ d'on, igualant aquesta expressió amb l'anterior resulta:

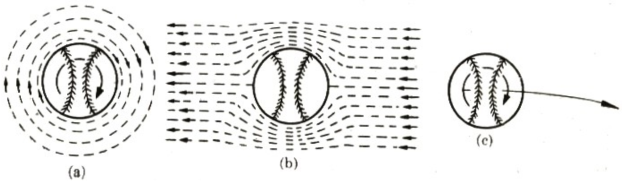
$p_a + ½*\rho*v_a^2 = p_a + \rho_0*g*h$ eliminant p_a en els dos termes de la igualtat tenim:

$½*\rho*v_a^2 = \rho_0*g*h$ o sigui:

$v_a = [2(\rho_0/\rho)*g*h]^{1/2}$ de manera que així es pot calcular v_a en funció d'h i de la relació entre les densitats del fluid del conducte i el fluid del manòmetre.

f/ Efecte d'una pilota:

Quan es llança una pilota amb una velocitat lineal v i amb un moviment de rotació, per un efecte de fregament o de viscositat també fa girar les capes més pròximes d'aire que hi estan en contacte.

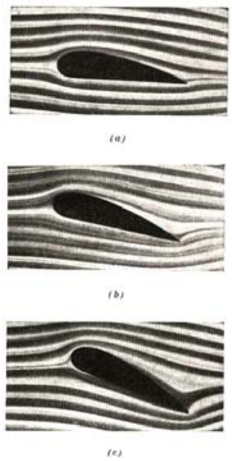


Això fa que en una banda de la pilota aquesta velocitat se suma a la de translació i a l'altra banda es resta. D'acord amb l'equació de Bernoulli, a la banda on hi ha més velocitat la pressió disminueix i a la banda on hi ha més velocitat la pressió augmenta, de manera que entre les dues cares laterals de la pilota hi ha una diferència de pressions que origina una força perpendicular al sentit de la trajectòria i que fa desviar la pilota cap a un costat. És a dir que en un partit de futbol o de tenis jugat a la Lluna les pilotes sempre descriurien trajectòries parabòliques però sense desplaçament lateral de cap mena. També tenim que una pilota més llisa tindrà una trajectòria amb menys efecte perquè arrosega les capes d'aire més immediates amb menys força.

De totes maneres no es pot calcular correctament la trajectòria d'una pilota llançada amb efecte a partir de l'equació de Bernoulli perquè l'aire que arrossega al seu voltant és un fluid compressible i amb una certa viscositat i per tant només ens pot donar una visió qualitativa del fenomen però no quantitativa.

g/ Sustentació de l'ala d'un avió:

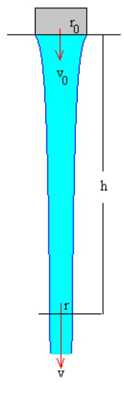
Explicat d'una manera molt elemental, podem dir que el perfil de l'ala d'un avió és de tal forma que el seu perímetre és més llarg a la part superior que a la part inferior. Per això a la part superior la velocitat de l'aire, quan l'avió avança, és més gran que a la part inferior i d'acord amb l'equació de Bernoulli hi disminueix la pressió. Aquesta diferència de pressions dóna com a resultat una força vertical que és la que equilibra el pes de l'avió i fa que s'aguanti en l'aire.



Ara bé, si es va augmentant l'angle d'atac, arriba un moment que a la part superior i a darrera de l'ala es comencen a formar remolins d'aire que fan que aquesta diferència de pressions ja no es mantingui i que l'avió entri en pèrdua.

Annex

L'equació de continuïtat ens dóna la forma d'un raig d'aigua que surt d'una aixeta abans que no es trenqui en forma de gotes a causa de la tensió superficial.



Partint d'un forat de radi r_0 i d'una velocitat de sortida v_0, podem deduir el radi r i la velocitat v un cop el líquid ha recorregut una altura h.

A la distància h la velocitat és $v = (v_0^2 + 2g*h)^{1/2}$ (arrel quadrada)

i per l'equació de continuïtat tenim:

$A_0*v_0 = A*v$ o sigui:

$\pi*r_0^2*v_0 = \pi*r^2*v$ d'on resulta:

$r^2 = r_0^2*v_0/v = r_0^2*v_0/(v_0^2 + 2g*h)^{1/2} = r_0^2*[v_0^2/(v_0^2 + 2g*h)]^{1/2}$ i per tant:

$r = r_0*[v_0^2/(v_0^2 + 2g*h)]^{1/4}$ (arrel quarta)