NOCIONS ELEMENTALS SOBRE LA RELATIVITAT (2)

Els dos postulats de la relativitat especial

Einstein no va deduir la seva teoria a partir dels resultats experimentals sinó que aquests resultats el van conduir a formular uns postulats, a partir dels quals es va poder elaborar una teoria coherent i que concordava amb la realitat observada.

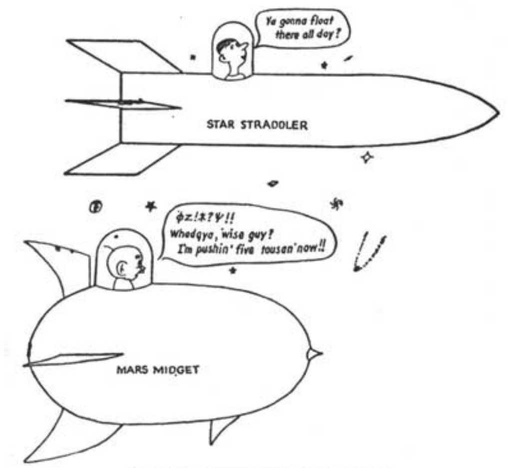


Figure 8. Which Rocket is 'Moving'?

1/ En tots els SR inercials les lleis de la natura són idèntiques i no hi ha manera de distingir cap moviment absolut. Això equival a estendre el principi de relativitat galileà dels fenòmens mecànics a tots els fenòmens de la natura, i en particular als fenòmens òptics, elèctrics i magnètics. Si els dos coets de la figura van a la mateixa velocitat, cap dels dos astronautes pot dir si es mou de pressa, a poc a poc, o bé si està aturat del tot.

2/ La velocitat de la llum en el buit és constant i és independent del moviment de la font emissora o del receptor. Això és un pas més endavant que dir només que és constant respecte al focus emissor (Michelson i Morley). Ara es diu que és constant en el buit i que és independent del moviment del focus. Però constant respecte a què? Doncs constant en relació a qualsevol observador i a qualsevol SR, sigui quin sigui el seu moviment relatiu respecte a qualsevol altre SR, i en particular respecte al moviment del focus emissor.

Aquest segon postulat fou revolucionari i semblava desfiar el sentit comú, però era del tot necessari per explicar la realitat observada. Fixem-nos que aquest segon postulat està en contradicció amb la transformació clàssica, que estableix la suma i resta de velocitats. Per tant la conseqüència és que cal canviar la transformació clàssica per una altra que resulti vàlida.

La velocitat de la pedra i la del vagó se sumen o es resten, segons el seu sentit, i això dóna la velocitat de l'impacte de la pedra sobre el pont. En canvi, la llum d'una estrella sempre es rep a la mateixa velocitat, tant si la Terra s'hi acosta com si se n'allunya.

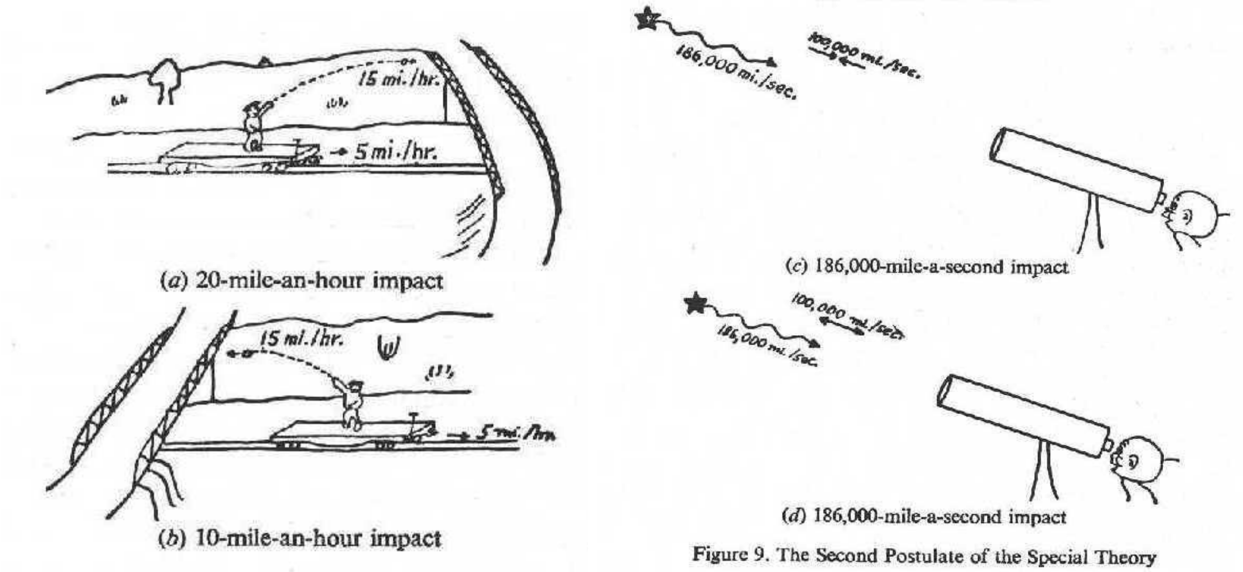


Figure 9. The Second Postulate of the Special Theory

Doncs bé, d'aquests dos postulats ja en treiem com a primera conseqüència l'eliminació del concepte de simultaneïtat.

El concepte de simultaneïtat

Les afirmacions que inclouen temps comporten l'ús del concepte de simultaneïtat, p. ex. dir que un tren arriba a les 7 vol dir que l'arribada del tren i l'arribada de la busca del meu rellotge sobre el nº 7 són successos simultanis.

Això va bé per definir el temps en el mateix lloc d'un rellotge. El problema apareix en mesurar el temps en llocs allunyats del rellotge.

No serveix el mètode de mesurar el temps a base de la recepció de senyals lluminosos procedents dels successos a cronometrar (que es el que fem en astronomia!) perquè òbviament els temps enregistrats dependran de la posició de l'observador.

Podem imaginar un mètode de sincronització de rellotges d'idèntica construcció posats en dos punts A i B fixos entre si, si admetem que el temps que tarda la llum per anar d'A a B és el mateix que per anar de B a A. Un raig de llum surt d'A en en moment T_a i arriba a B en en moment T_b, es reflecteix i retorna a A en en moment T'_a. Aleshores podrem considerar els dos rellotges sincronitzats si:

$T_b - T_a = T'_a - T_b$

P. ex. si el raig de llum surt d'A en el segon 3, arriba a B en el segon 12, es reflecteix i retorna a A en el segon 21, els rellotges estan sincronitzats, ja que:

$12 - 3 = 9 = 21 - 12$

i els punts A i B estan separats 12 "segons llum".

Però si el rellotge B està avençat p. ex. 2 segons respecte a l'A, el raig de llum li arriba al segon 14 però retorna a A igualment en el segon 21, i resulta:

$14 - 3 = 11 \neq 7 = 21 - 14$

Suposem que tenim una cambra mòbil amb un observador interior i un d'exterior, i que fem un senyal lluminós des del centre de la cambra. Per a l'observador interior el senyal arribarà simultàniament a les dues parets. Per a l'observador exterior la font de llum es mou, però la velocitat de la llum és la mateixa i el senyal arribarà primer a la paret posterior perquè aquesta paret s'acosta al senyal de llum que li ve i aquest haurà de recórrer una distància menor, però arribarà més tard a la paret anterior perquè aquesta s'aparta del senyal de llum i aquest haurà de recórrer una distància major. Per tant, la llum no arribarà simultàniament a les dues parets. Així doncs aquests dos esdeveniments (arribada de la llum a les dues parets) són simultanis per a l'observador interior i no ho són per a l'observador exterior. Això vol dir que dos esdeveniments poden ser simultanis en un SR i no ser-ho vistos des d'un altre SR diferent.

Sobre bé aquest tema de la simultaneïtat va bé fer un aclariment per evitar confusions: Un mateix esdeveniment pot resultar que s'observi en moments diferents des de dos llocs d'observació fixos respecte a l'esdeveniment i fixos entre si, simplement per haver-hi distàncies diferents fins als llocs d'observació, com en l'exemple de la figura, en què una explosió a Orió es veu amb 50 anys de diferència a la Terra o a Aldebaran, però ja es comprèn que això és una altra cosa que no té res a veure amb la relativitat.

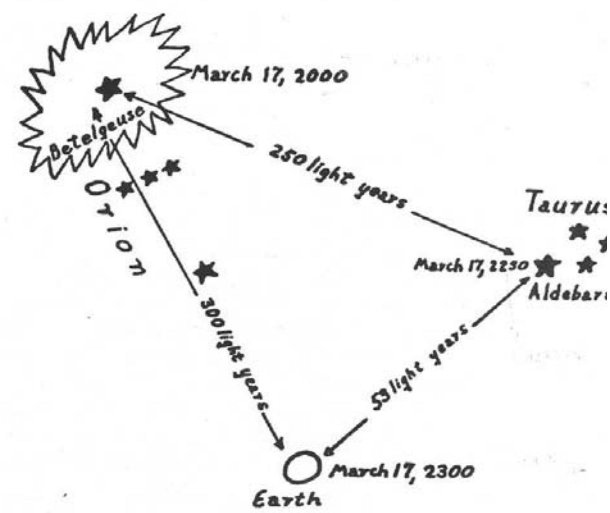


Figure 12. Time is Different for Different Observers

Però la cosa encara és més complicada: Ja no discutim només la simultaneïtat d'un sol esdeveniment per a dos observadors, o bé que dos esdeveniments diferents poden ser simultanis per a un observador i no ser-ho per a un altre. També pot resultar que a un tercer observador aquests mateixos esdeveniments li ocorrin en ordre invers!

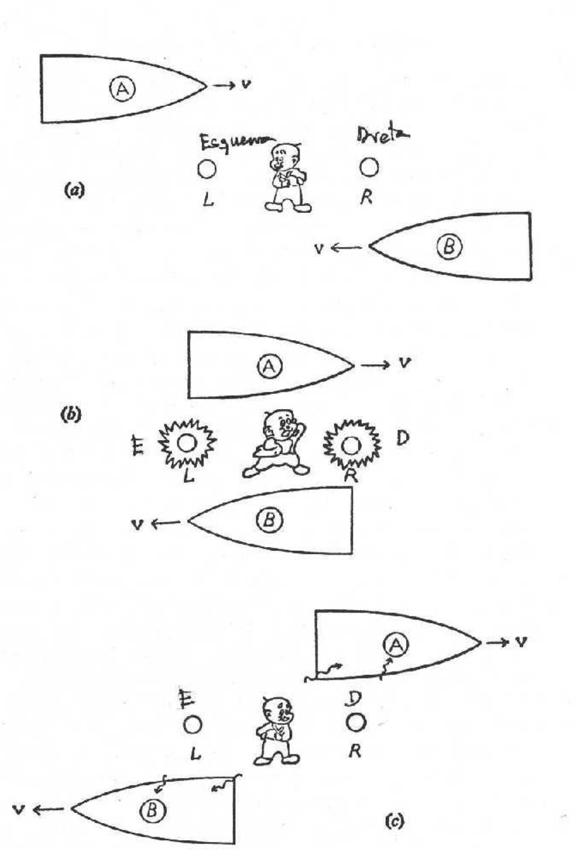


Figure 14. Two Events which are Simultaneous for an Observer 'at rest' are not necessarily Simultaneous for Two Other Observers not 'at rest'

Suposem dos coets A i B que s'acosten a la mateixa velocitat v, lleugerament inferior a la velocitat de la llum, cap a un observador C, situat entremig, i per tant, que és considerat estacionari. En els coets hi ha uns observadors situats al seu centre. També hi ha 2 petards E (esquerre) i D (dret) equidistants de C, aturats respecte a ell i separats una distància igual a la llargada dels coets. *fig. (a).*

Els petards exploten, el D, quan li passa pel davant la punta del coet A, i l'E, quan li passa pel davant la punta del coet B. *fig (b).* Evidentment, per a C, els dos petards exploten simultàniament. Però l'observador A veu primer l'explosió de D, perquè mentre la llum de les explosions se li acosta, la distància AD s'escurça i la distància AE s'allarga.

En canvi, per a l'observador B, les dues explosions li semblen ocórrer en sentit invers, ja que per a ell la distància que s'escurça és la BE i la que s'allarga és la BD. *fig (c).*

Tots tres observadors tenen raó, ja que cap dels tres sistemes de referència no és privilegiat respecte als altres dos. La diferència de temps entre explosions augmenta amb la distància entre els petards.

Queda clar que l'ordre dels esdeveniments depèn de la posició de l'observador i de la seva velocitat respecte als llocs dels esdeveniments i respecte als altres observadors. La simultaneïtat també és doncs, una qüestió relativa.

Encara un altre aclariment: Quan augmenta la separació entre els esdeveniments observats també augmenta la diferència dels temps d'observació entre diferents observadors, siguin dos o més, però quan dos esdeveniments tenen lloc simultàniament en el mateix punt, aleshores sempre són simultanis respecte a qualssevol observadors, independentment de les seves velocitats relatives entre si i respecte al punt dels esdeveniments.

La transformació de Lorentz

És la transformació de coordenades entre dos SR en moviment relatiu amb velocitat uniforme l'un respecte a l'altre, que permet complir els dos postulats de la relativitat.

Per simplicitat seguim posant l'eix de les x en la mateixa direcció i sentit de la velocitat relativa de desplaçament dels dos SR.

En lloc de $x' = x - vt$ tenim $$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$

$y' = y$ (igualment)
$z' = z$ (igualment)

i en lloc de $t' = t$ tenim $t' = \dfrac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$

Aquesta tranformació de coordenades és la que concorda amb els postulats de la relativitat especial o restringida. Ja es veu que quan v té valors baixos respecte a c, v^2/c^2 és un valor encara més baix i despreciable a efectes pràctics, i l'arrel quadrada val pràcticament 1, i que també és despreciable el terme v/c^2, de manera que aleshores retornem a la transformació clàssica. Podem dir doncs, que la transformació clàssica de coordenades entre dos SR és vàlida per a valors baixos de la velocitat relativa de desplaçament entre ells.

Comprovem que amb la transformació de Lorentz la velocitat de la llum és la mateixa en els dos SR. Si enviem un senyal de llum en el sentit positiu de l'eix de les x, es propaga segons l'equació $x = ct$ i posant aquest valor a la transformació de Lorentz tenim,

$$x' = \frac{ct - vt}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} = \frac{(c - v)t}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \qquad \text{i} \quad t' = \frac{t - (v/c^2)ct}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} = \frac{t - vt/c}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} = \frac{(1-v/c)t}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} =$$

$$= \frac{(c - v)t}{c\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \qquad \text{d'on} \qquad ct' = \frac{(c - v)\,t}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} = x'$$

O sigui, en el SR xyx tenim $x = ct$ i en el SR x'y'z' tenim $x' = ct'$ és a dir, en els dos SR la relació entre els espais (x, x') i els temps respectius (t, t') és una mateixa velocitat c i no pas una de diferent.

Efecte de les altes velocitats relatives

Mitjançant un exemple, vegem què passa per a valors alts de v, però abans posem una taula dels valors de v^2/c^2, de $\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ i del valor invers $1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ per a valors de v molt elevats.

c	v/c	v	v^2/c^2	$1-v^2/c^2$	arrel q.	1/arrel q.
300.000	0,10	30.000	0,0100	0,9900	0,9950	1,0050
300.000	0,20	60.000	0,0400	0,9600	0,9798	1,0206
300.000	0,30	90.000	0,0900	0,9100	0,9539	1,0483
300.000	0,40	120.000	0,1600	0,8400	0,9165	1,0911
300.000	0,50	150.000	0,2500	0,7500	0,8660	1,1547
300.000	0,60	180.000	0,3600	0,6400	0,8000	1,2500
300.000	0,70	210.000	0,4900	0,5100	0,7141	1,4003
300.000	0,80	240.000	0,6400	0,3600	0,6000	1,6667
300.000	0,90	270.000	0,8100	0,1900	0,4359	2,2942
300.000	0,91	273.000	0,8281	0,1719	0,4146	2,4119
300.000	0,92	276.000	0,8464	0,1536	0,3919	2,5516
300.000	0,93	279.000	0,8649	0,1351	0,3676	2,7206
300.000	0,94	282.000	0,8836	0,1164	0,3412	2,9311
300.000	0,95	285.000	0,9025	0,0975	0,3122	3,2026
300.000	0,96	288.000	0,9216	0,0784	0,2800	3,5714
300.000	0,97	291.000	0,9409	0,0591	0,2431	4,1135
300.000	0,98	294.000	0,9604	0,0396	0,1990	5,0252

300.000	0,99	297.000	0,9801	0,0199	0,1411	7,0888
300.000	0,995	298.500	0,9900	0,0100	0,0999	10,0125
300.000	0,998	299.400	0,9960	0,0040	0,0632	15,8193
300.000	0,999	299.700	0,9980	0,0020	0,0447	22,3663

Contracció de longituds

La transformació de Lorentz mostra que si des d'un SR (diguem que el nostre SR) mesurem p. ex. la longitud d'una barra que es mou amb velocitat relativa respecte a ell (o sigui que és fixa respecte a un altre SR que es mou respecte al primer) veurem que la seva longitud és menor que si la mesurem des del seu propi SR.

Però, com ho farem per fer aquesta mesura? Doncs si el SR que es mou respecte al nostre és p. ex. un vagó de tren, posarem moltes màquines fotogràfiques al costat de la via, totes elles comandades per rellotges sincronitzats, i les programarem perquè es disparin totes al mateix instant. En una de les fotos apareixerà el començament i en una altra l'acabament de la barra que volem mesurar, i la separació entre aquestes dues càmeres ens donarà la llargada de la barra en moviment mesurada des del seu propi SR.

Fent això trobarem que aquesta longitud val:

$L' = L\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$

Ara bé, la situació és totalment simètrica, és a dir, que si tenim la barra en el nostre SR i hi ha un altra persona que té les càmeres i els rellotges sincronitzats a dalt del vagó, quan repeteixi l'experiment trobarà el mateix resultat:

$L = L'\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$

Vegem un exemple en xifres:

Suposem v = 0,9c = 270.000 km/s, distàncies en km i t en segons. Sobre el SR x'y'z' tenim una barra d'1 km de llargada posada paral·lelament a l'eix x'. Vegem les coordenades dels seus extrems referits al SR xyz al cap d'1 segon.

Tenim: v = 270.000 t = 1 o sigui que x' = (x - 270.000)/0,4359 d'on resulta

per a x' = 0 x = 270.000

per a x' = 1 x = 270.000 + 0,4549 = 270.000,4359

O sigui que la separació entre els extrems de la barra, mesurada des de terra, només és de 0,4359 km.

Hom es pot preguntar si canvien realment les dimensions de la barra o bé si només és una il·lusió. A aquesta pregunta cal respondre que sí que hi ha canvi, ja que es pot mesurar des de qualsevol altre SR amb el mètode explicat, però la magnitud d'aquest canvi depèn justament de la velocitat relativa entre el SR des d'on es fa la mesura i el SR solidari amb l'objecte mesurat. Com més gran és aquesta velocitat relativa més gran és el canvi. En particular, des del SR solidari amb l'objecte mesurat el canvi és nul, ja que l'objecte està en repòs respecte al seu propi SR.

Tampoc cal no confondre aquesta contracció de longituds amb la contracció de Fitzgerald-Lorentz, que consistia en una hipotètica contracció real dels cossos en el sentit de la seva velocitat relativa respecte a l'èter.

L'energia cinètica i la massa (citació resumida d'A. Einstein - Sobre la teoria de la relativitat especial i general).

Les modificacions aportades per la teoria especial de la relativitat només afecten les lleis de la mecànica clàssica referents a moviments molt ràpids, ja que per als moviments lents, les seves desviacions són imperceptibles.

L'energia cinètica d'un cos de massa m ja no ve donada per l'expressió: $E = 1/2\ mv^2$ sinó per:

$$E_c = \frac{mc^2}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$ que tendeix a infinit quan $v \to c$

Així doncs, per elevada que sigui l'energia utilitzada per produir l'acceleració, la velocitat del cos sempre és < c.

Si desenvolupem E_c en sèrie tenim:

$E_c = mc^2 + 1/2\ mv^2 + 3/8\ v^4/c^2 + ...$

El primer sumand no conté v i correspon a l'equivalència entre massa i energia. El segon sumand és l'únic que és tingut en compte per la mecànica clàssica. El tercer sumand (i següents) és petit respecte al segon, sempre que v^4/c^2 sigui pràcticament despreciable.

El resultat més important és que les dues lleis que la física clàssica de conservació de massa i energia considera com a independents, en virtut de la física relativista es converteixen en una de sola.

En efecte, el primer postulat de la relativitat exigeix, p. ex. que la llei de conservació de la massa es compleixi no només en relació a un sistema de referència sinó respecte a tots els que entre si tinguin un moviment de translació uniforme.

A partir d'això i de les equacions de Maxwell s'arriba a la conclusió que un cos que vagi a velocitat v i que absorbeixi una energia E_0 en forma de radiació, sense modificar la seva velocitat, experimenta un increment d'energia:

$$\frac{E_0}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$ la qual afegida a l'energia cinètica dóna una energia total de: $$\frac{mc^2 + E_0}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$

El primer sumand és l'energia que tenia el cos abans d'absorbir l'energia E_0 i el segon sumand és l'energia absorbida.

Si posem la fórmula anterior en la forma:

$$\frac{(m + E_0/c^2)c^2}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$ veiem que el cos té la mateixa energia cinètica d'un cos de massa $m + E_0/c^2$ que es mogués a la velocitat v.

Per tant podem dir que quan el cos absorbeix una energia E_0, és com si la seva massa inercial agumentés en E_0/c^2.

O sigui que la massa inercial d'un cos no és constant, sinó que varia d'acord amb els seus canvis d'energia. La llei de conservació de la massa d'un sistema equival al de la conservació de l'energia i només és vàlida si el sistema no absorbeix ni emet energia.

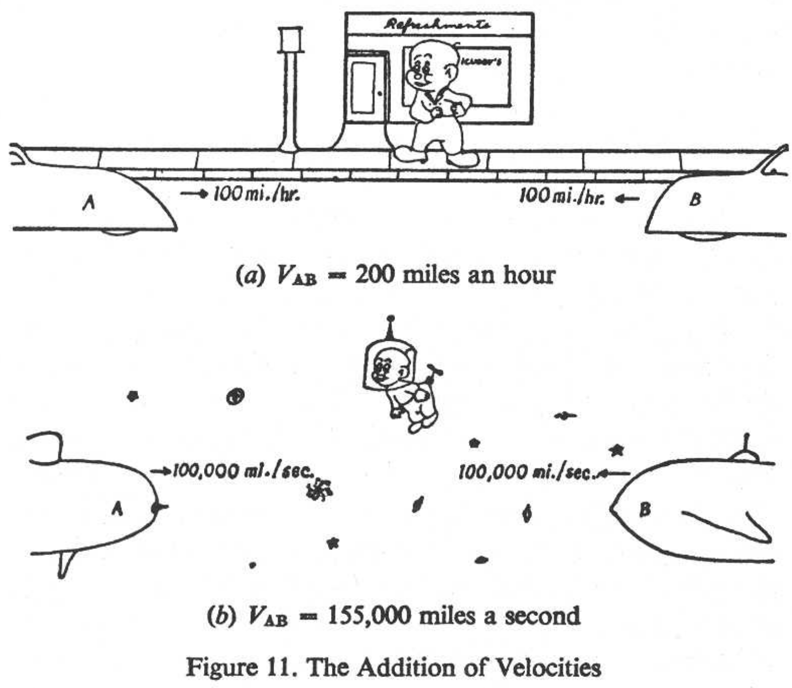
Deixant ja la citació d'Einstein, també hi ha altres llibres que ho diuen així: Quan dos cossos A i B es mouen l'un respecte a l'altre amb velocitat relativa v,

Si A pot mesurar la massa de B trobarà: $M' = M / (\sqrt{1 - v^2/c^2})$

Si B pot mesurar la massa d'A trobarà: $M = M' / (\sqrt{1 - v^2/c^2})$

Es a dir "l'altre" objecte sempre apareix amb més massa.

Addició de velocitats



(a) V_{AB} = 200 miles an hour

(b) V_{AB} = 155,000 miles a second

Figure 11. The Addition of Velocities

Si un observador mesura les velocitats de dos objectes alineats amb ell, p. ex. de dos coets A i B (v_a i v_b) i aleshores els astronautes A o B mesuren la seva velocitat relativa d'un respecte a l'altre (d'A respecte a B o de B respecte a A) trobaran:

$$v_{ab} = \frac{v_a + v_b}{1 + v_a * v_b / c^2}$$

D'aquesta equació es veu que quan v_a i/o v_b s'acosten a c, la velocitat relativa v_{ab} cada cop és menor que v_a+v_b. De més a més, aquesta equació és simètrica, o sigui que $v_{ab} = v_{ba}$.

Traduint a km el segon exemple de la figura tindrem:

v_a i v_b = 160.934,4 km/s d'on resulta,

v_{ab} = 321.869,8/1,2877764 = 249.942,3 km/s (155.306,9 milles/s) i no pas els 321.869,8 km/s que resultarien de la simple addició de velocitats.

Limitacions imposades respecte a c

De la fórmula de la contracció de longituds es veu que quan $v \to c$ $L' \to 0$ i que v no pot ser > c perquè aleshores l'arrel quadrada donaria un nombre imaginari.

De la fórmula de mesurament de les masses es veu que quan $v \to c$ $M' \to \propto$. Per tant la velocitat de la llum és la màxima possible. Perquè un objecte pogués assolir-la caldria donar-li una quantitat infinita d'energia.

De la fórmula de l'addició de velocitats o de la velocitat relativa de dos objectes resulta que per de pressa que vagin dos objectes respecte a un observador, la velocitat relativa de l'un respecte a l'altre sempre és < c.

En efecte: Suposem $v_a = v_b = c - \varepsilon$ aleshores tenim,

$$\frac{v_{ab}}{c} = \frac{c - \varepsilon + c - \varepsilon}{c + (c - \varepsilon)^2/c} = 2c\,\frac{c - \varepsilon}{c^2 + (c - \varepsilon)^2} = \frac{2c^2 - 2c\varepsilon}{2c^2 - 2c\varepsilon + \varepsilon^2}$$

sempre el denominador és major que el numerador i, per tant, $v_{ab} < c$, però $v_{ab} \to c$ quan $\varepsilon \to 0$

Dilatació del temps

Suposem dos coets idèntics, equipats amb regles de mesura i rellotges iguals, que es mouen per l'espai amb una velocitat relativa v entre ells i que, quan passen l'un al costat de l'altre, els seus rellotges marquen 0. Ja en el mateix moment que un avença l'altre, l'observador A veu que el rellotge de B va més a poc a poc. El "ritme" del temps que veu és:

$t' = t \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$

essent t el temps que A llegeix en el seu propi rellotge. Tant li fa que A i B s'acostin com que se separin.

Si B llegeix el rellotge d'A, també veurà com per a ell el rellotge d'A va més a poc a poc. O sigui que per a dos observadors que estiguin en moviment relatiu l'un respecte a l'altre, sempre sembla a cadascun d'ells que el rellotge de l'altre va més a poc a poc.

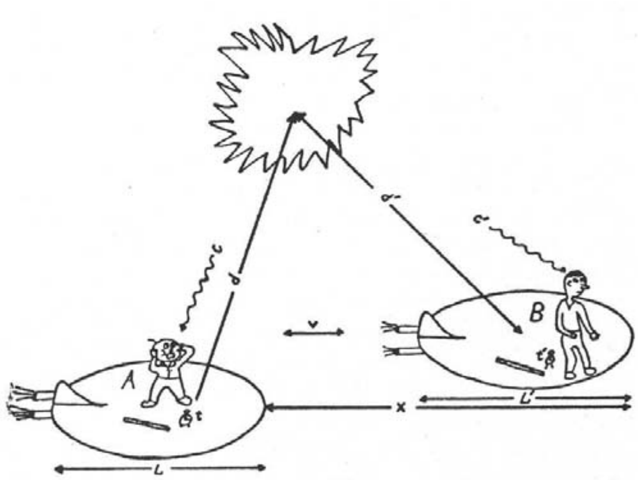


Figure 10. The Basis for the Lorentz Transformation Equations

En particular, quan $v \to c$ veiem com el rellotge de l'altre es para. És a dir, la teoria especial contradeix l'antiga creença que el temps transcorre sempre a la mateixa velocitat per a totes les persones o objectes de l'univers.

No es tracta només que l'altre rellotge vagi més a poc a poc, sinó que és que el temps de l'altre SR s'escola més lentament a tots els efectes (això sempre vist des del nostre SR), o sigui també el ritme biològic dels éssers vius, l'envelliment dels materials, l'activitat atòmica, etc, tot va d'acord amb un altre ritme.

Cal aclarir que parlem de comparació de rellotges feta pel mètode de les màquines de fotografiar sincronitzades i solidàries d'un dels dos coets, però no pas de les lectures directes del rellotge B fetes des del coet A, que estarien influenciades pel retard corresponent a la distància de separació entre A i B. Aquest segon fenomen és diferent i s'anomena efecte Doppler relativista (i donaria diferents resultats segons si els coets se separessin o s'acostessin).

RESUM

- Vista la constància de la velocitat de la llum respecte al focus emissor però també respecte a l'observador, Einstein va formular els seus dos postulats de la relativitat especial: a/ Les lleis físiques són idèntiques en tots els sistemes inercials, i b/ La velocitat de la llum és la mateixa mesurada en qualsevol SR.
- No es pot parlar de simultaneïtat entre esdeveniments ocorreguts i/o observats des de diferents SR. Alguns esdeveniments poden ser simultanis per a un observador, poden no ser-ho per a un altre i poden ocórrer en ordre invers per a un tercer.
- Cal substituir la transformació clàssica o de Galilei per la transformació de Lorentz.
- La diferència entre la transformació de Lorentz i la transformació clàssica només es nota a altes velocitats relatives. P. ex. per a un 10 % de la velocitat de la llum, la diferència només és de l'ordre del 1/2 % i a 0,5c ja és de l'ordre del 15 %.
- Com a conseqüència resulta que cada SR té un espai i un temps propis, que no són iguals als dels altres SR que tenen velocitats relatives amb el nostre o entre ells. L'espai i el temps absoluts de Newton no existeixen en el món físic real.
- Aplicant la transformació de Lorentz es comprova la constància de la velocitat de la llum en els diferents SR amb moviment entre si.
- L'energia cinètica d'un cos tendeix a $\propto$ quan la seva velocitat tendeix a c. Se'n segueix com a conseqüència que un cos no pot assolir mai la velocitat de la llum perquè se li hauria de donar una energia infinita.

- Dit d'altra manera: L'increment de la velocitat i de l'energia d'un cos comporta un augment de la seva massa inert.
- Com a conseqüència en resulta l'equivalència entre massa i energia segons la relació $E = mc^2$, i també en resulta la refosa de les dues lleis de conservació de la massa i de conservació de l'energia en una de sola.
- La velocitat relativa entre dos cossos sempre és inferior a la suma de les seves velocitats relatives respecte a un tercer.
- La dilatació del temps no s'ha de confondre amb l'efecte Doppler relativista consistent a una variació en les lectures fetes des d'un altre SR per efecte de la variació entre la distància de separació dels dos SR.