NOCIONS ELEMENTALS SOBRE LA RELATIVITAT (3)

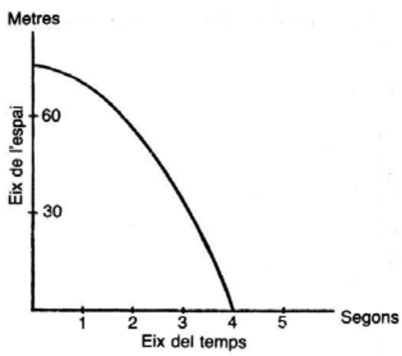
El contínuum tèmporoespacial

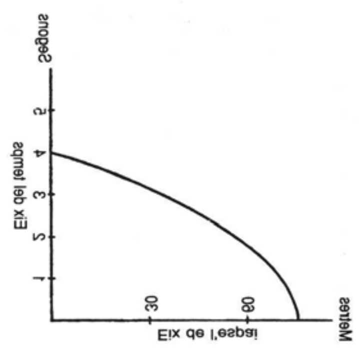
Tots els punts d'una recta o d'una semirecta constitueixen un contínuum unidimensional. Diem contínuum perquè podem recórrer l'espai entre dos punts qualssevol de la barra avançant a passos tan curts com volguem. El pla és un contínuum bidimensional, ja que també dos punts qualssevol es poden unir per una corba dividida en passos tant curts com volguem. Per les mateixes raons, el nostre espai és un contínuum tridimensional. Ara bé, de moment això és geometria però encara no és física.

Suposem que volem expressar l’espai recorregut per una pedra que cau verticalment en funció del temps. Per a l’espai prendrem la seva distància a terra, que disminueix p. ex. des de 80 m fins a 0 (valors arrodonits), i el temps l’expressarem en segons. Si volem, això ho podem fer amb una simple taula a dues columnes o bé sobre una recta vertical, posant punts amb les diferents posicions de la pedra i els valors corresponents del temps al costat, però també ho podem fer en unes coordenades cartesianes.

d en metres	t en segons
80	0
75	1
60	2
35	3
0	4

A la 1ª fig. tenim la distància al terra sobre l'eix vertical i el temps sobre l'eix a l'horitzontal i a la 2ª fig. tenim l'espai a l'eix horitzontal i el temps a l'eix vertical perquè concordi amb altres figures que veurem més endavant.





Ara podem dir que si bé la pedra té el seu moviment en un espai unidimensional, aquest moviment ve representat per una corba en un contínuum tèmporoespacial bidimensional i aquesta corba caracteritza la posició d'una pedra en un instant qualsevol.

Així podem passar de representar el moviment con una successió d'esdeveniments en el contínuum unidimensional de l'espai a quelcom fix que existeix en el continuum espai-temps bidimensional, o sigui passar de la representació dinàmica d'una cosa que canvia contínuament a la representació estàtica d'una cosa que és, representació estàtica que conté alhora informació sobre l'espai recorregut per la pedra i sobre el temps necessari per fer aquest recorregut.

Les dues representacions són equivalents i podem emprar la que ens agradi més, però la teoria de la relativitat prefereix la imatge estàtica de la corba espai-temps.

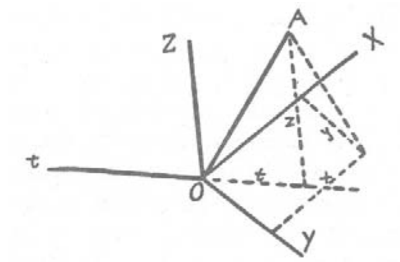
Tot això que acabem de veure també és vàlid per a la física clàssica i encara no té res a veure amb la relativitat. La diferència és que en física clàssica podem descompondre aquest contínuum bidimensional en dos contínuums unidimensionals un de temps i un d'espai. Tal com mostra la transformació clàssica, dos observadors, situats en SC que es mouen amb velocitat relativa v entre ells, donaran per a cada esdeveniment de la caiguda de la pedra coordenades diferents per a l'espai però la mateixa coordenada per al temps.

En canvi, en física relativista, el temps de xoc de la pedra amb el sòl ja no és el mateix per a tots els observadors. En dos SR diferents aquest esdeveniment tindrà coordenades també diferents, tant d'espai com de temps, i per això el contínuum bidimensional ja no es pot descompondre en dos contínuums unidimensionals de temps i espai.

Podem generalitzar aquesta representació, primer a un espai cartesià de dues dimensions més el temps, amb la qual cosa ens resulta un contínuum tèmporoespacial de tres dimensions, talment com es fa la maqueta d'una muntanya apilant capes de cartolina retallada, cada una corresponent a una corba de nivell. En el nostre cas aniríem apilant plans un sobre l'altre, cada un corresponent a un increment de temps, i en cada pla hi tindríem marcada la situació del punt en l'espai de dues dimensions. Això seria com tenir una corba en un espai de tres dimensions, en què la projecció de la corba sobre el pla xy fos la trajectòria del punt en el pla cartesià i la cota de cada punt de la corba tridimensional respecte al pla xy correspongués al temps de pas del punt per aquell indret. Si el contínuum tèmporoespacial bidimensional es pot representar per una taula a dues columnes, el contínuum tèmporoespacial de tres dimensions es pot representar en una taula de tres columnes x, y, t.

Seguint aquest raonament, tenim que per descriure el moviment general d'un punt en l'espai tridimensional cal emprar quatre nombres, tres per a la seva posició i un per al temps. Per tant, el món dels esdeveniments constitueix un contínuum quadridimensional. La representació del contínuum tèmporoespacial quadridimensional ja s’hauria de fer en una taula a 4 columnes x, y, z, t.

El que trobo que no té gaire sentit és l'intent de dibuixar unes coordenades amb quatre eixos, com en la figura adjunta, cosa que vol ser aclaridora i que trobo totalment confusionària. Crec que figures com aquesta fan més nosa que servei. Voler representar un espai de quatre dimensions en un full de paper de dues, em sembla un intent condemnat al fracàs.



Com a conclusió diguem que des del punt de vista de la relativitat, tant la mesura del temps com la de l'espai canvien en passar d'un SR a un altre, i la transformació de Lorentz explicita les propietats de transformació del contínuum tèmporoespacial en el nostre món quadridimensional d'esdeveniments.

Representació geomètrica de l'espai-temps

La idea de tractar les tres coordenades de l'espai més el temps com si fos un espai geomètric (i doncs no representable gràficament) de quatre dimensions es deu al matemàtic Hermann Minkowski, que havia estat professor d'Einstein a Zürich. Per això d'aquest espai tetradimensional se'n diu espai de Minkowski.

Tornem al diagrama espai-temps amb només una dimensió d'espai i una de temps i hi veiem representat el moviment d'un raig de llum sobre l'eix x. En afegir-hi l'eix del temps els punts de la recta ens indiquen les dues coordenades, de l'espai recorregut i del temps emprat a recórrer-lo.

La tangent de l'angle que fan l'eix vertical i la recta inclinada és justament la velocitat de la llum, de manera que el moviment de qualsevol altre cos, sempre a velocitat inferior, es representarà per punts situats entre l'eix vertical i la recta inclinada.

Hem començat considerant el moviment d'un raig de llum o d'altres punts que es movien en una sola dimensió, però això ho podem generalitzar. Suposem una font de llum posada entre dos plans molt i molt junts, de manera que només es pugui difondre en un sol pla entre les dues pantalles.

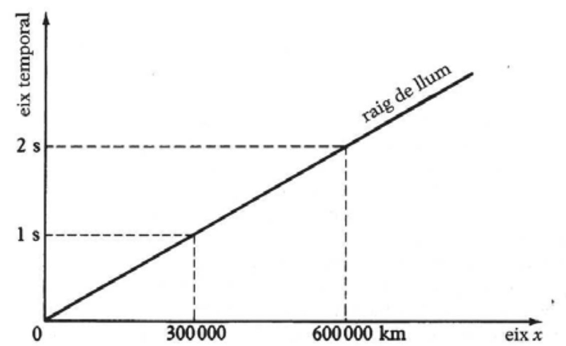


Figura 6.6. *El moviment d'un raig de llum en la direcció x.*

Aleshores tindrem la llum corrent en totes direccions des d'un punt origen i des d'un instant inicial, i la podrem representar en el pla xy. Els extrems de tots aquests raigs de llum en instants donats aniran formant circumferències de radi creixent.

De la mateixa manera que el moviment d'un raig de llum en un espai unidimensional es representa per una recta en una gràfica espai-temps bidimensional, resulta que el moviment de raigs de llum en totes direccions en un espai bidimensional es representa per un con de llum en una gràfica espai-temps tridimensional, i qualsevol altre esdeveniment (el moviment de qualsevol altre punt) sempre quedarà inclòs a dintre del con.

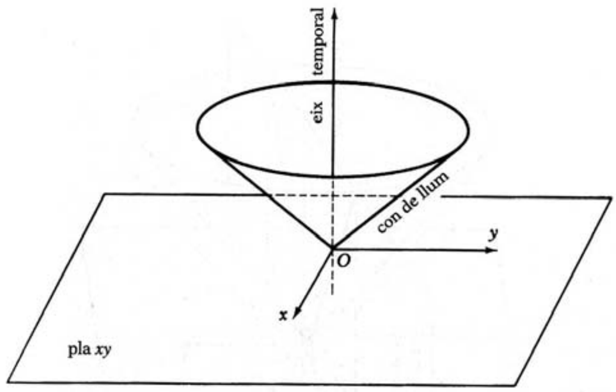


Figura 6.7. *El con de llum per a una font a O.*

A fora del con no hi ha esdeveniments possibles perquè haurien hagut d'ocórrer a velocitat superior a la de la llum.

Òbviament, a continuació ve el moviment de raigs de llum o de punts en un espai tridimensional que comportaria la generalització del con de llum en un espai tetradimensional, però tots sabem que això no és representable gràficament, i potser val més no intentar-ho a base de succedanis que encara emboliquen més la cosa.

La (pseudo)paradoxa dels bessons

Comencem veient un altre exemple: Un astronauta viatja a $v = 0{,}8c$ cap a un astre situat a 4 anys llum, més o menys fins a α Centauri. Suposem que l'acceleració i desacceleració d'aquest astronauta és brutal i que assoleix la velocitat 0,8c en el sentit d'anada, en el de tornada i que fa l'aturada final en un espai de temps brevíssim, de manera que en la pràctica podem considerar tot el seu viatge com efectuat a 0,8c.

Entre anar i tornar, des de la Terra mesurarem que ha tardat

$$t = \frac{\text{espai}}{\text{velocitat}} = \frac{4 + 4}{0{,}8} = 10 \text{ anys}$$

Però per a ell, li representarà haver tardat només:

$t' = t \sqrt{[1 - (0{,}8c)^2/c^2]} = 0{,}6\, t = 6$ anys, o sigui 3 d'anada i 3 de tornada.

Però és que el coet ha recorregut 8 anys llum en 6 anys = a velocitat > c? No! perquè la seva distància s'arronsa a d' = 2 cops 4 anys llum x 0,6 = 4,8 anys llum, i naturalment resulta que v = e/t, o sigui 4,8 anys llum: 6 anys = 0,8 c, que és la seva velocitat, tal com s'ha dit al principi.

A part el tema de la dilatació del temps dintre del coet, també hem de tenir en compte que des de la Terra, en el viatge d'anada les imatges dels esdeveniments de dintre el coet cada vegada tardaran més a arribar, degut a l'increment de la seva distància, i igualment les imatges dels esdeveniments de la Terra tardaran més a arribar a dintre del coet (en el viatge de tornada l'efecte serà el contrari). L'efecte d'aquest endarreriment o avançament degut a l'increment (positiu o negatiu) de la distància s'anomena efecte Doppler relativista, i quan fem el calendari dels esdeveniments d'un SR des de l'altre SR caldrà tenir en compte tots dos efectes.

I ara ja anem a parar a la paradoxa anunciada: Tenim dos bessons A i B. A es queda a la Terra i B se'n va amb el coet de l'exemple anterior i torna. Quan B torna, A ha envellit 10 anys i ell només 6 anys.

Ara bé, si tot moviment és relatiu, per què no podem suposar que és la Terra la que es mou en l'espai en la direcció oposada i que el coet és el que es queda quiet? Aleshores seria A el que hauria envellit només 6 anys i B 10. Com que cada un no pot ser simultàniament més jove que l'altre, aquí hi ha una contradicció i en això consisteix aquesta famosa paradoxa.

La solució és que aquests dos punts de vista no són intercanviables i que, per tant, la suposada paradoxa en realitat no existeix. Dit d'altra manera, les dues situacions no són simètriques i per això no són matemàticament reversibles.

Segons els llibres, això és perquè el coet sofreix acceleracions i desacceleracions respecte a la resta de masses de l'univers i la Terra no (no sé com s'hauria d'explicar això si en tot l'univers no hi hagués res més que la Terra i el coet).

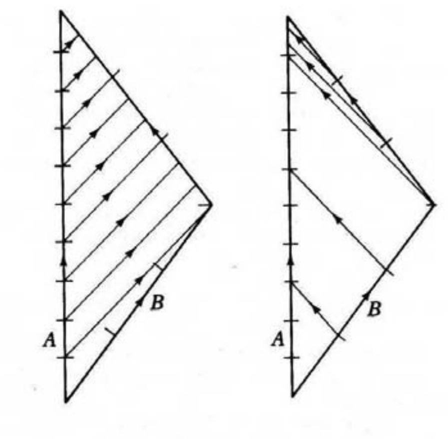
Tanmateix, sí que sempre es possible considerar un cas ben simètric, de dos astronautes que sortissin de la Terra en direccions oposades per fer aquest viatge i retornessin tots dos en el mateix instant. En aquest cas, tots dos haurien envellit 6 anys, però els habitants de la Terra n'haurien envellits igualment 10, com en l'exemple anterior.

Una manera d'entendre més clarament aquest exemple, és considerant separadament i cronològicament com cada un dels dos personatges veu el que passa en l'SR de l'altre. Això ho farem en un diagrama espai-temps on l'eix horitzontal indica la distància a l'origen i l'eix vertical indica el temps transcorregut des de l'instant inicial.

El bessó A, com que està en repòs, apareix com una línia recta paral·lela a l'eix temporal (en realitat el mateix eix de les y), però el bessó B, que es mou primer cap a la dreta i després cap a l'esquerra, es dibuixa com una línia trencada amb segments de la mateixa longitud. La inversa del pendent d'aquests segments respecte a l'horitzontal és igual a la velocitat de desplaçament del coet de B en el seu viatge d'anada i tornada.

Si considerem l'instant d'arribada de B a α Centauri, per a A hauran passat 5 anys però per a B només n'hauran passats 3. Això és el cada un veu d'ell mateix, en el seu propi SR.

La *fig. b* representa el viatge d'uns senyals de llum que cada any (dels seus) A envia a B, i la *fig. c* representa el viatge d'uns senyals de llum que cada any (dels seus) B envia a A. Ara la inversa del pendent de les rectes que representen aquests senyals és igual a la velocitat de la llum.



(b) (c)

Examinant la *fig.*b, veiem que en arribar a α Centauri com que el bessó astronauta B està a 4 anys llum de la Terra, ell encara no haurà pogut veure els esdeveniments dels anys terrestres 2, 3, 4 i 5. Per a ell, a la Terra només ha passat 1 any, i com que en el seu SR ja han passat 3 anys, els esdeveniments terrestres els veu com si ocorreguessin a 1/3 de velocitat (mesurats amb el seu temps).

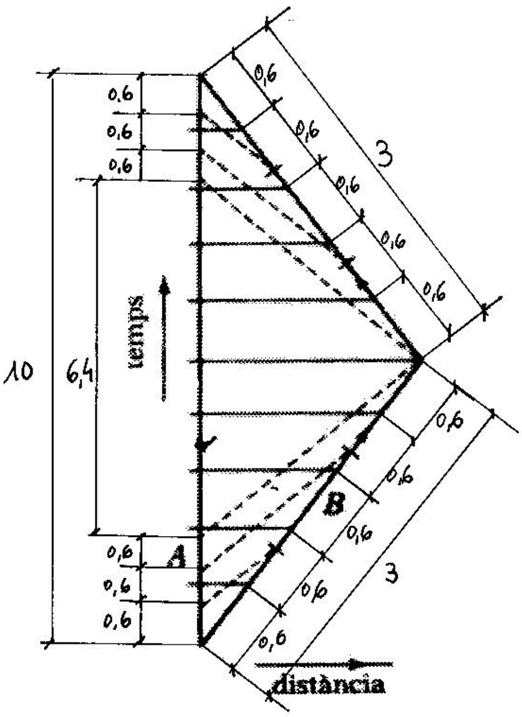
I a la seva tornada, els esdeveniments terrestres dels anys 2^{n} al $10^{\text{è}}$ forçosament se li acumularan tots en els seus 3 anys de tornada, de manera que els veurà com si li ocorreguessin al triple de velocitat (9 anys terrestres condensats en 3 dels seus).

Examinant ara la *fig (c)* tenim que el bessó A veu que B arriba a α Centauri al cap de 9 anys terrestres, que són els 5 anys del viatge d'anada comptats en temps terrestre més els 4 anys que tarda la llum a arribar des d'α Centauri a la Terra. Per tant, A veu el viatge d'anada de B (5 anys terrestres o 3 anys del coet) dilatats a 9 anys terrestres, i forçosament veurà tot el viatge de tornada (també 5 anys terrestres o 3 anys del coet) condensat en 1 sol any terrestre.

Sobre aquest tema dels bessons encara podem mirar la *fig. a* on es representa les línies de simultaneïtat dels esdeveniments de final de cada any per a A i per a B. Aquestes línies de simultaneïtat són obtingudes per càlcul i no per tramesa/recepció de senyals de cap mena, de manera que queden exemptes de l'efecte Doppler relativista. Degut a la dilatació del temps, per a cada un dels dos rellotges 1 any és simultani amb 0,6 anys de l'altre rellotge.

Per al rellotge A els successos simultanis estan units per les línies contínues i horitzontals, p. ex. els seus 5 anys ho són amb l'arribada de B a α Centauri.

Per al rellotge B els successos simultanis estan units per les línies discontínues i inclinades, p. ex. 1 any de B és simultani amb 0,6 anys d'A, 2 anys amb 1,2 i 3 anys amb 1,8. Els seus 3 anys de viatge de tornada són simultanis amb els darrers 1,8 anys d'A. La brutal acceleració necessària per invertir el sentit de moviment de B, fa que les línies de simultaneïtat canviïn molt ràpidament i que aquest curt interval de frenada i inversió del moviment sigui simultani amb els anys d'1,8 a 8,2 d'A, o sigui amb 6,4 anys.



Al final de la sessió un assistent va plantejar una qüestió molt interessant: Suposem que l'astronauta que va en el coet no emet només un flaix de llum sinó un raig de llum continu cap a la Terra, i que es tracta d'un raig de llum paral·lela, con un làser, que no es dispersa d'una manera esfèrica sinó que es transmet d'una manera cilíndrica. Si la llum d'1 any de viatge seu es rep durant 3 anys a la Terra, quina seria la potència rebuda o bé quina energia arribaria a la terra durant tot el període?

En vam estar parlant i al final vam arribar a la necessària conclusió que, apartant-se p. ex. el coet de la Terra a una velocitat de 0,8c l'efecte Doppler (que en solem dir relativístic, però que és un efecte Doppler com qualsevol altre) feia desplaçar la freqüència de la llum molt cap al vermell o bé fins a l'infraroig, i com que l'energia dels fotons és directament proporcional a la seva freqüència l'energia de cada fotó també disminuïa, de manera que també disminuïa la potència rebuda a la Terra, però que necessàriament l'energia rebuda en el període total havia de ser la mateixa que era emesa des del coet.

RESUM

- En lloc de la representació dinàmica del moviment d'un punt en una (x), dues (x, y), o tres (x, y, z) dimensions espacials, la física moderna prefereix la representació estàtica en dues dimensions espai-temps (x, t), en tres (x, y, t) o en quatre (x, y, z, t). Els dos primers casos són representables gràficament però el tercer no ho és.
- El moviment unidimensional d'un punt en una gràfica espai-temps ha de quedar sempre comprès en el sector que va de l'eix vertical del temps fins a la recta que representa el moviment d'un raig de llum. Fora d'aquest sector no hi ha esdeveniments possibles perquè haurien hagut d'ocórrer a una velocitat superior a la de la llum.

- En una gràfica espai-temps la velocitat d'un punt en moviment és igual a la tangent de l'angle format per l'eix vertical del temps i la recta que uneix el punt a l'origen.
- La recta que representa el moviment d'un raig de llum en un espai unidimensional es generalitza a un con en el cas de propagació de la llum en un espai bidimensional.
- L'anomenada paradoxa dels bessons ens il·lustra la no simetria de les dues situacions, atès que el moviment d'un dels dos personatges comporta acceleracions i desacceleracions respecte a la resta de les masses de l'univers mentre que l'altre no en queda afectat.
- De més a més, el seu atent examen és un bon exercici per entendre millor el tema de la contracció de longituds i de la dilatació del temps, i també de separar aquest darrer fenomen del de l'efecte Doppler relativístic.